Переходная функция

Переходная функция $h(t)$ – реакция на единичный скачок $1(t)$.

Единичный скачок – это функция $1(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0.\end{cases}$

Иными словами, $x_{вх}(t)=1(t)$. Изображение входного сигнала

$$L\left[x_{вх}(t)\right]=L\left[1(t)\right]=\frac{1}{p}.$$

Отсюда из общего выражения $X_{вых}(p)=W(p)\cdot X_{вх}(p)$ можно найти функциональную зависимость для изображения переходной функции:

$$H(p)=W(p)\cdot\frac{1}{p},$$

а затем по таблице соответствия оригиналов и изображений – саму переходную функцию:

$$h(t)=L^{-1}\left[H(p)\right]=L^{-1}\left[W(p)\cdot\frac{1}{p}\right]$$

Переходные функции типовых элементарных звеньев

Пропорциональное звено (П-звено)

Изображение переходной функции

$$H(p)=k/p,$$

а сама переходная функция $h(t)=k$ (см. первую строку таблицы оригиналов и изображений в конце данного параграфа). Таким образом, при прохождении через П-звено единичный скачок умножается на коэффициент усиления (рис. 1).

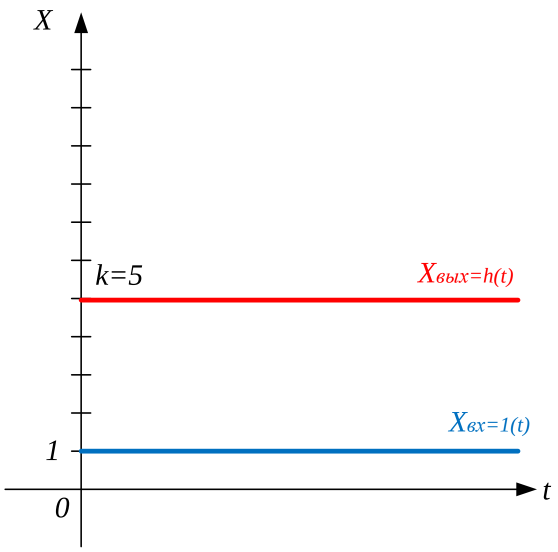

Рис. 1. Переходная характеристика П-звена с k=5

Апериодическое звено (А-звено)

Передаточная функция данного звена

$$W(p)=\frac{k}{Tp+1}.$$

По изображению переходной функции

$$H(p)=\frac{k}{Tp+1}\cdot\frac{1}{p}=\frac{k}{T}\cdot\frac{1}{p(p+1)}$$

в строке 4 таблицы оригиналов и изображений находится оригинал переходной функции А-звена:

$$h(t)=k\left(1-e^{-t/T}\right).$$

Размерность коэффициента передачи k зависит от размерности входного и выходного сигналов, а размерность постоянной времени T имеет размерность времени.

Постоянная времени T – это время, в течение которого выходная величина достигла бы своего установившегося значения, если бы она изменялась с постоянной скоростью, равной скорости изменения ее в начальный момент времени.

Теоретически время переходного процесса $t_{пп} = \infty$. Фактически переходный процесс считается законченным, когда выходной сигнал входит в 5%-ный «коридор», т.е.

$$x_{вых}(t)=0{,}95x_{вых.уст}$$

Время переходного процесса определяется из уравнения

$$x_{вых}(t)=k\left(1-e^{-t_{пп}/T}\right).$$

Очевидно,

$$e^{-t_{пп}/T}=1-0{,}95=0{,}05.$$

Решая полученное уравнение относительно времени переходного процесса $t_{пп}$, получим

$$t_{пп} = 3T.$$

Время переходного процесса обычно принимается с «запасом», равным $(4\ldots5)T$.

Характерные точки для построения переходного процесса по параметрам звена (рис. 2):

$$h(0)=k\left(1-e^{-0/T}\right)=k(1-1)=0;$$

$$h(T)=k\left(1-e^{-T/T}\right)=k\left(1-\frac{1}{e}\right)=0,6k\,;$$

$$h(\infty)=k\left(1-e^{-\infty/T}\right)=k(1-0)=k$$ – для времени $t > 4T$.

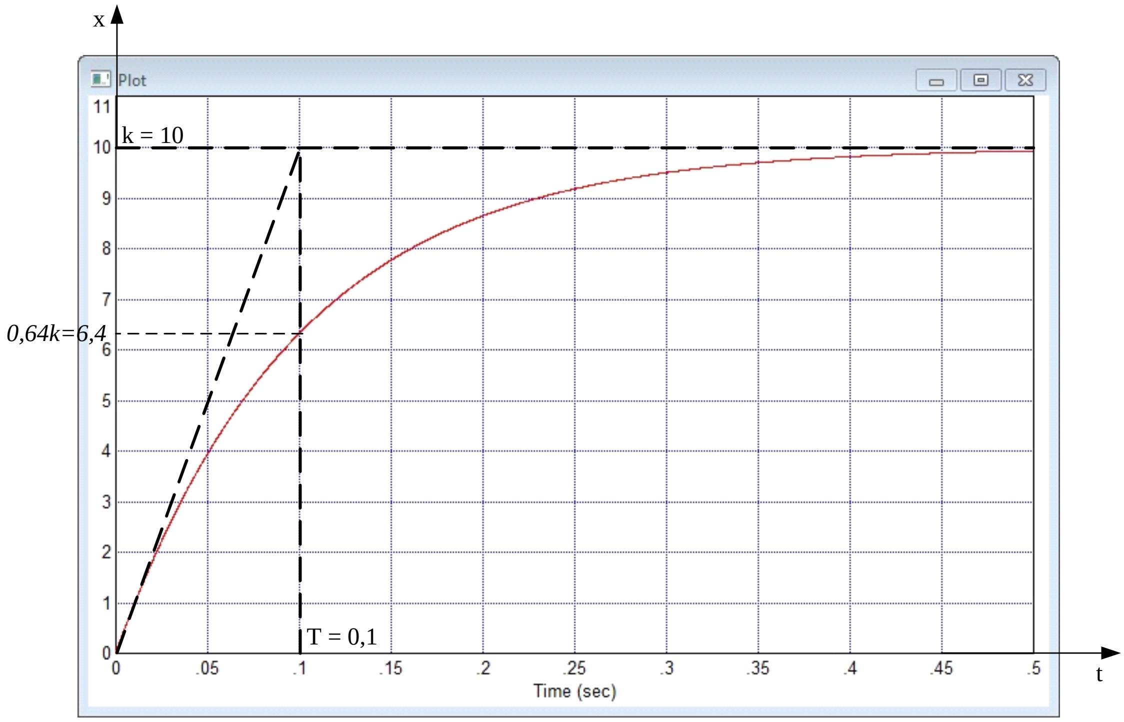

Рис. 2. Переходная функция апериодического звена с k=10 и T=0,1 с

И-звено

ИИ-звено (астатическое звено)

Передаточная функция данного звена

$$W(p)=\frac{k}{p}.$$

Изображение переходной функции:

$$H(p)=\frac{k}{p}\cdot\frac{1}{p}=\frac{k}{p^2}.$$

По таблице оригиналов и изображений (строка 3 в таблице оригиналов и изображений) оригинал переходной функции представляет собой выражение

$$h(t)=kt.$$

Коэффициент k называется коэффициентом усиления или передачи звена. При единичном входном воздействии он численно равен скорости изменения выходной величины, поэтому его иногда называют скоростью разгона.

Переходная функция астатического звена зависит от времени, а не только от уровня входного сигнала. Иными словами, интегрирующее звено обладает *астатизмом*, поскольку в установившемся режиме работы *отсутствует* однозначная зависимость между $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ и $x_{\text{ВХ}}(t)$. При скачкообразном входном воздействии выходная величина неограниченно возрастает или убывает (в зависимости от полярности входного сигнала), *не приходя* к установившемуся значению.

Характерные точки для построения переходного процесса по параметрам звена (рис. 3):

$$h(0) = 0 \text{ и}$$
$$h(1) = k.$$

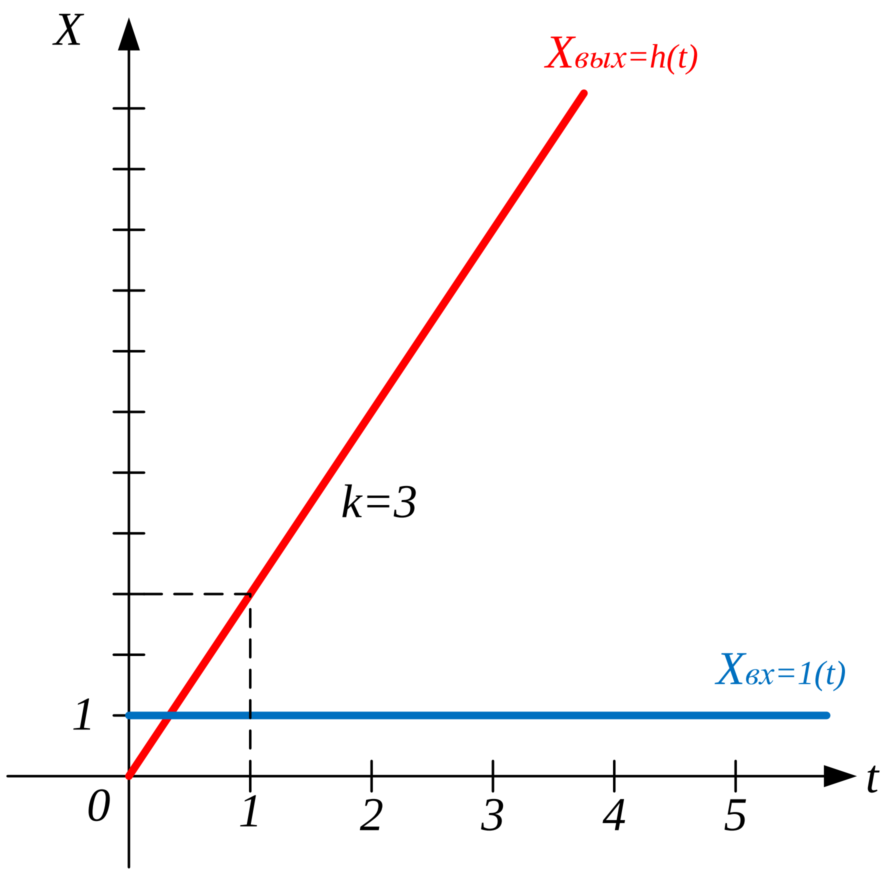

Рис. 3. Переходная функция ИИ-звена с k=3

Реальное интегрирующее звено

Передаточная функция данного звена

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}.$$

Изображение переходной функции:

$$H(p) = W(p)\cdot\frac{1}{p} = \frac{k}{p^2(Tp+1)} = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{k/T}{p+1}.$$

Согласно строке 12 в таблице оригиналов и изображений, оригинал переходной функции будет иметь вид

$$h(t) = \frac{k}{T}\cdot\frac{e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1}{\left(\frac{1}{T}\right)^2} = KT\left(e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1\right) = kTe^{-\frac{t}{T}} + kt - kT.$$

График переходного процесса представляет собой сумму трех составляющих – экспонента и две прямые (рис. 4). Сложив эти две прямые, получим опорную прямую, проходящую через точки с координатами ($-kT$; 0) и (T; 0) (рис. 6). К ней асимптотически приближается график переходного процесса. Практически он сольется с указанной опорной прямой на времени $3T$. Начало переходного процесса

$$h(0) = kTe^{-\frac{0}{T}} + k\cdot 0 - kT = kT - kT = 0.$$

Для ручного построения плавно, по экспоненте соединяем начало координат и точку на опорной прямой для t=3T.

Дифференцирующее звено (Д-звено)

ИД-звено

Передаточная функция данного звена

$$W(p) = kp.$$

Изображение его переходной функции:

$$H(p) = k\cdot p\cdot\frac{1}{p} = k,$$

следовательно, оригинал по таблице (строка 17 в таблице оригиналов и изображений) имеет вид

$$h(t) = k\cdot\delta(t),$$

где $\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$ – единичный импульс.

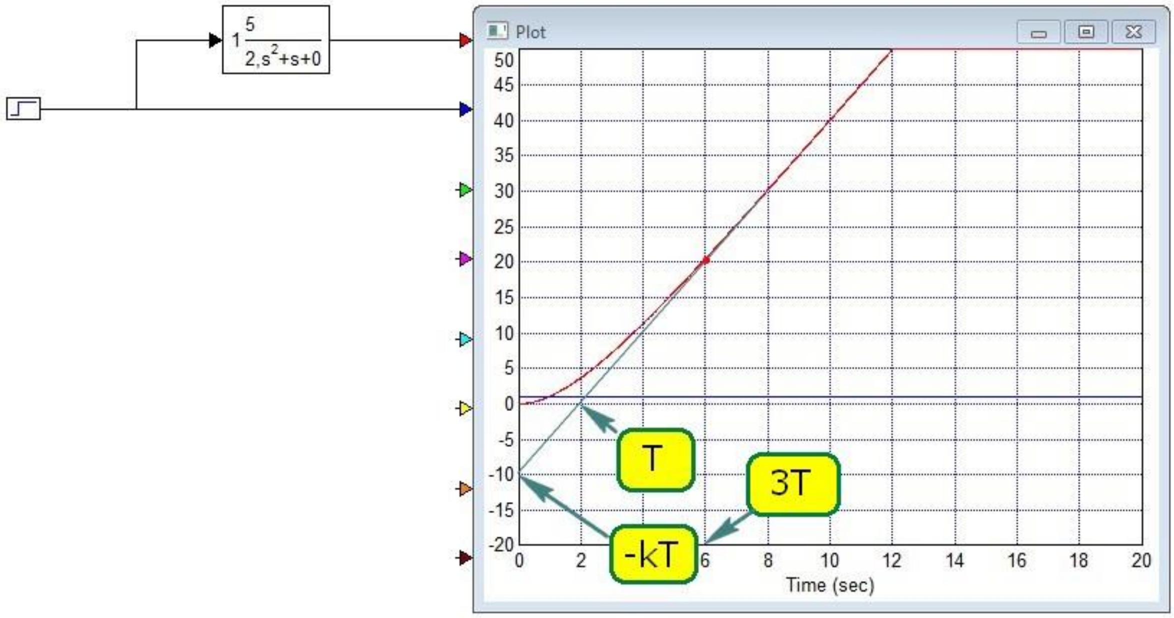

Рис. 4. Переходная функция РИ-звена с *k*=5 и *T*=2

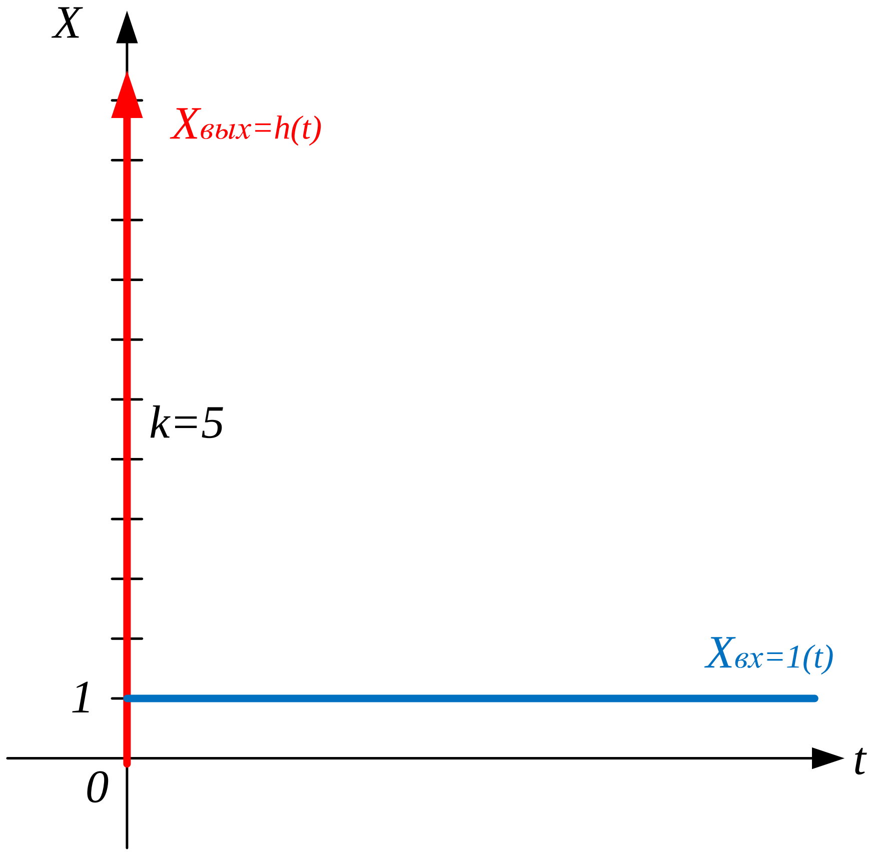

Рис. 5. Переходная функция ИД-звена с *k*=5

Переходный процесс на выходе данного звена представляет собой импульс бесконечно большой величины и бесконечно малой длительности. Графическое построение по точкам в данном случае невозможно – показываем условно стрелкой на оси ординат.

Реальное дифференцирующее звено

Передаточная функция данного звена

$$W(p) = \frac{kp}{Tp+1}.$$

Изображение переходной функции:

$$H(p) = \frac{kp}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k}{Tp+1} = \frac{k}{T} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{T}},$$

а ее оригинал, согласно строке 2 таблицы оригиналов и изображений:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}.$$

Характерные точки для построения переходного процесса по параметрам звена (рис. 6):

$$h(0) = \frac{k}{T} e^{0/T} = \frac{k}{T}, h(T) = \frac{k}{T} e^{-T/T} = \frac{k}{T} \cdot 0{,}36 \text{ и } h(\infty) = \frac{k}{T} e^{-\infty/T} = 0.$$

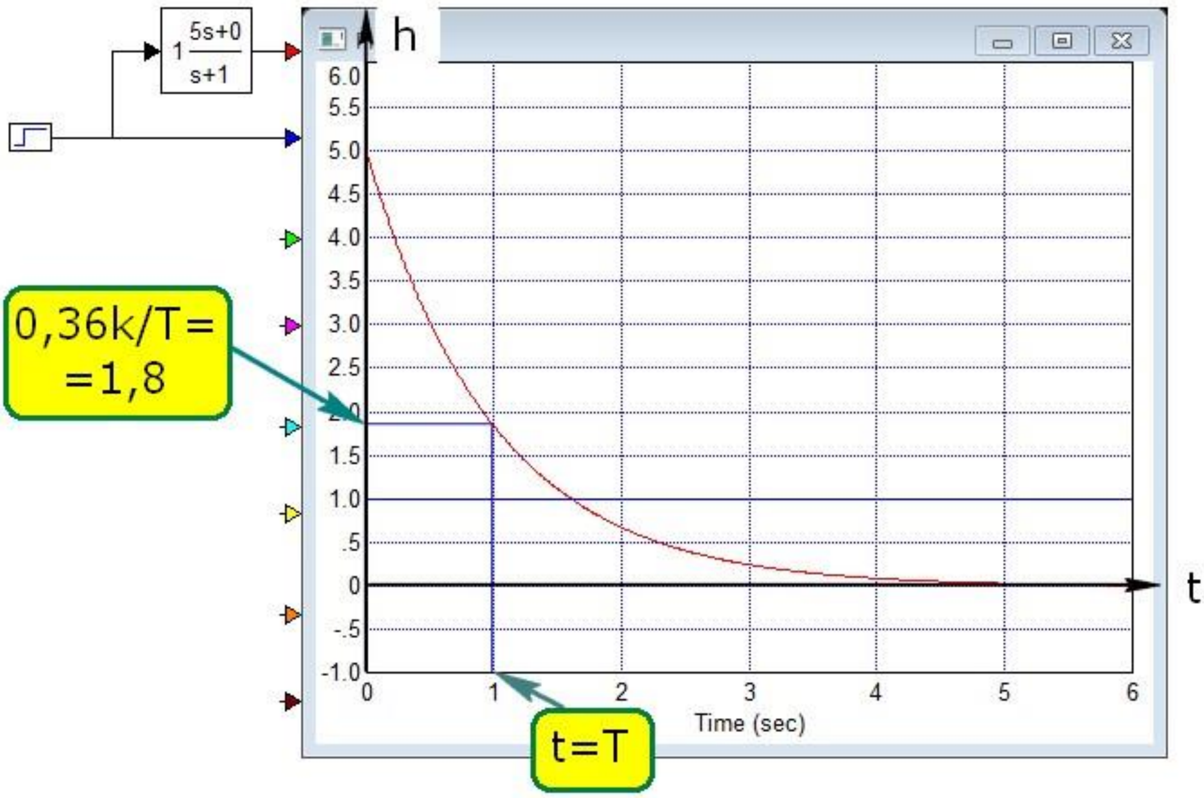

Рис. 6. Переходная функция РД-звена с k=5 и T=1

Таблица оригиналов и изображений

№	$L[f(t)]$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
3	$\frac{1}{p^2}$	t
4	$\frac{1}{p\cdot(p+a)}$	$\frac{1}{a}\cdot\left(1-e^{-at}\right)$
5	$\frac{1}{(p+a)\cdot(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}\cdot\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
6	$\frac{p}{(p+a)\cdot(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}\cdot\left(a\cdot e^{-at}-b\cdot e^{-bt}\right)$
7	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t\cdot e^{-at}$
8	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at}\cdot(1-a\cdot t)$
9	$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin(at)$
10	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$
11	$\frac{p}{\left(p^2+a^2\right)p}$	$\frac{1}{a^2}(1-\cos(at))$
12	$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2}\left(e^{-at}+at-1\right)$
13	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab(a-b)}\left[(a-b)+be^{-at}-ae^{-bt}\right]$
14	$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\left(1-e^{-at}-ate^{-at}\right)$

15	$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\times$ $\times\left[(c-b)e^{-at}+(a-c)e^{-bt}+(b-a)e^{-ct}\right]$
16	$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\times$ $\times\left[a(b-c)e^{-at}+b(c-a)e^{-bt}+c(a-b)e^{-ct}\right]$
17	1	$\delta(t)$
18	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	t^n