Передаточные функции типовых элементарных звеньев

Пропорциональное звено (П-звено)

Дифференциальное уравнение данного звена имеет вид

$$x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t),$$

где k – коэффициент усиления звена. При переходе к изображениям

$$X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p)$$

получаем передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = k.$$

Примером П-звена является делитель напряжения (рис. 1). У него параметром является коэффициент передачи $k = \frac{U_2}{U}$.

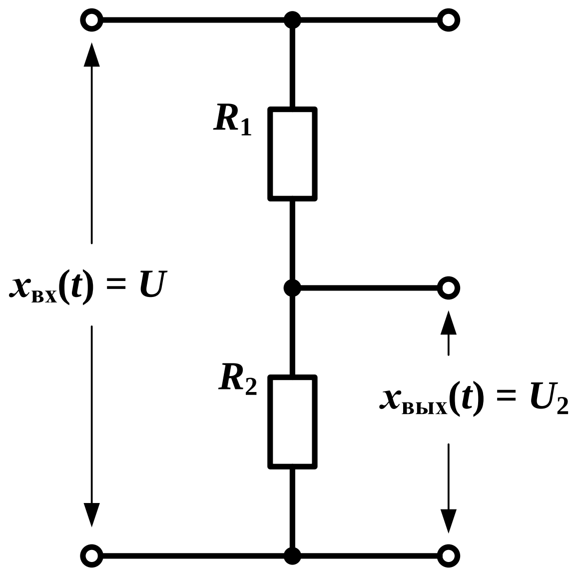

Рис. 1. Резистивный делитель напряжения

Апериодическое звено (А-звено)

А-звено описывается ДУ вида

$$T\frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t),$$

где k – коэффициент усиления, а T – постоянная времени звена.

В операторной форме этому выражению соответствует алгебраическое уравнение:

$$TpX_{\text{вых}}(p) + X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p).$$

Из него получается формула передаточной функции:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{Tp+1}.$$

Примером апериодического звена может служить генератор независимого возбуждения (рис. 2).

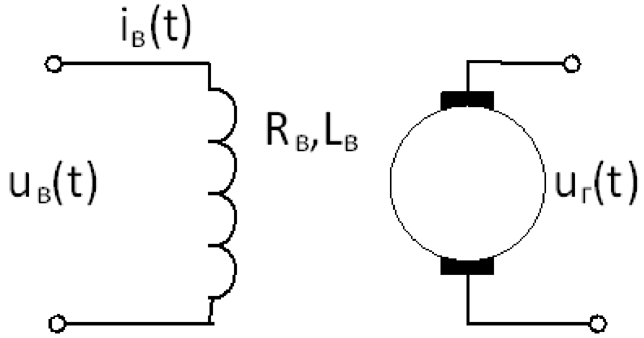

Рис. 2. Функциональная схема генератора независимого возбуждения

В соответствии с принципом действия генератора независимого возбуждения на обмотку возбуждения с параметрами $R_в$ и $L_в$ подается напряжение $u_в(t)$, являющееся входным сигналом данной системы:

$$u_в(t) = L_в \frac{di_в(t)}{dt} + R_в i_в(t).$$

Будем считать, что магнитная цепь генератора ненасыщена, поэтому напряжение на зажимах генератора (выходной сигнал системы) будет пропорционально току возбуждения:

$$u_г(t) = k_в i_в(t).$$

Найдём изображения:

$$U_в(p) = L_в pI(p) + R_в I_в(p)$$

и

$$U_г(p) = k_в I_в(p).$$

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{X_{ВЫХ}(p)}{X_{ВХ}(p)} = \frac{U_г(p)}{U_в(p)} = \frac{k_в I_в(p)}{L_в pI(p) + R_в I_в(p)} =$$

$$= \frac{k_в}{L_в p + R_в} = \frac{k_в / R_в}{(L_в p + R_в)/R_в} = \frac{k_в / R_в}{\frac{L_в}{R_в} p + 1}.$$

Таким образом, генератор независимого возбуждения – это А-звено с параметрами: коэффициентом усиления

$$k = k_в / R_в$$

и постоянной времени

$$T = L_в / R_в.$$

Интегрирующее звено (И-звено)

Различают два вида И-звена: идеальное и реальное.

Идеальное интегрирующее звено (астатическое звено)

Идеальный интегратор **(ИИ-звено)** осуществляет интегрирование входного сигнала и описывается уравнением

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = k\int_0^t x_{\text{ВХ}}(t)\,dt.$$

В операторной форме ему соответствует выражение

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{k}{p} X_{\text{ВХ}}(p),$$

из которого получается передаточная функция:

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Коэффициент *k* называется коэффициентом усиления или передачи звена.

Примером интегратора служит конденсатор, если за входной сигнал принять величину тока $i(t)$ в цепи (рис. 3), а за выходную величину – напряжение на обкладках конденсатора $u(t)$: входной сигнал

$$x_{\text{ВХ}}(t) = i(t),$$

а выходной –

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt.$$

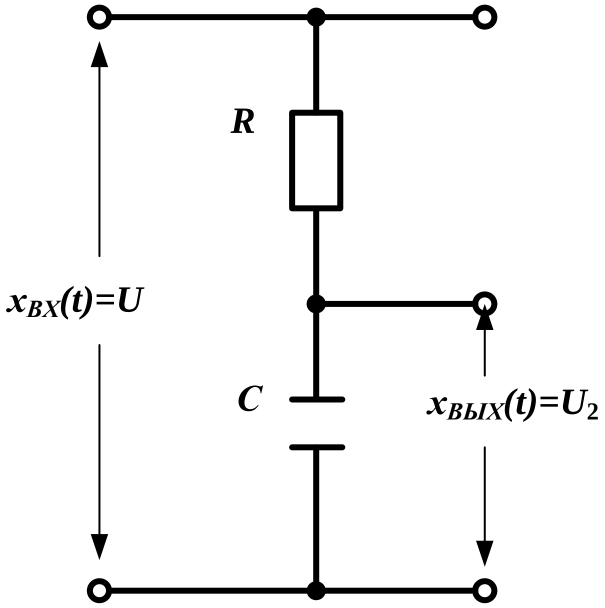

Рис. 3. Пример идеального интегратора

Их изображения:

$$X_{\text{ВХ}}(p) = I(p)$$

и

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = U_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{1}{Cp} I(p).$$

А передаточная функция:

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{\frac{1}{Cp} I(p)}{I(p)} = \frac{1}{Cp}.$$

Таким образом, получена передаточная функция ИИ-звена с коэффициентом усиления, обратно пропорциональным ёмкости конденсатора:

$$k = \frac{1}{C}.$$

Реальное интегрирующее звено (РИ-звено)

Реальное интегрирующее звено описывается уравнением

$$T \frac{dx_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + x_{\text{ВЫХ}}(t) = k \int_0^t x_{\text{ВХ}}(t) dt$$

или

$$T \frac{d^2 x_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2} + \frac{dx_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} = k x_{\text{ВХ}}(t).$$

В операторной форме:

$$\left(Tp^2 + p\right) X_{\text{ВЫХ}}(p) = k X_{\text{ВХ}}(p).$$

Отсюда можно получить его передаточную функцию в виде

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{k}{p(Tp+1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{k}{Tp+1}$$

и окончательно

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}.$$

Дифференцирующее звено (Д-звено)

Различают два вида Д-звена: идеальное и реальное.

Идеальное дифференцирующее звено

Сигнал на выходе идеального дифференцирующего звена **(ИД-звена)** пропорционален скорости изменения входного сигнала

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = k\frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt}.$$

В операторной форме данное выражение принимает вид

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = kpX_{\text{ВХ}}(p).$$

Отсюда передаточная функция идеального Д-звена

$$W(p) = kp.$$

Примера ИД-звена в природе не существует.

Реальное дифференцирующее звено (РД-звено)

ДУ данного звена имеет вид

$$T\frac{dx_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + x_{\text{ВЫХ}}(t) = k\cdot\frac{dx_{\text{ВХ}}(t)}{dt},$$

в операторной форме:

$$TpX_{\text{ВЫХ}}(p) + X_{\text{ВЫХ}}(p) = kpX_{\text{ВХ}}(p).$$

Отсюда его передаточная функция

$$W(p) = \frac{kp}{Tp+1}.$$

Примером РД-звена может служить *RC*-цепочка (рис. 4), у которой входной сигнал – это входное напряжение

$$x_{\text{вх}}(t) = U_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + Ri(t),$$

а выходной сигнал – выходное напряжение

$$x_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вых}}(t) = Ri(t).$$

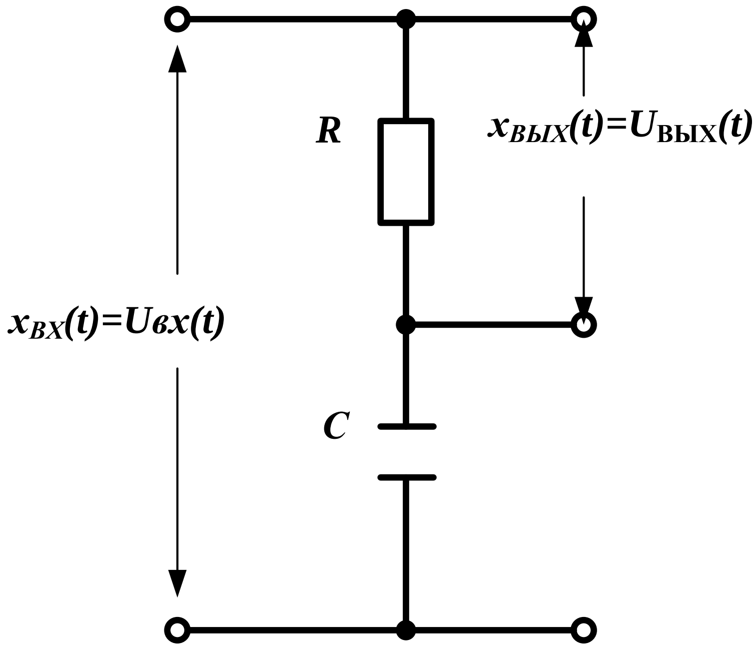

Рис. RC-цепь

Изображения входного и выходного сигналов:

$$X_{\text{ВХ}}(p)=U_{\text{ВХ}}(p)=\frac{1}{Cp}I(p)+RI(p)$$

и

$$X_{\text{ВЫХ}}(p)=U_{\text{ВЫХ}}(p)=RI(p).$$

А передаточная функция этой системы

$$W(p)=\frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)}=\frac{RI(p)}{\frac{1}{Cp}I(p)+RI(p)}=\frac{R}{\frac{1}{Cp}+R}=\frac{1}{\frac{1}{RCp}+1}=\frac{RCp}{RCp+1}.$$

Таким образом, приведенная на рис. 4 *RC*-цепь – это РД-звено с параметрами: коэффициентом усиления

$$k=1$$

и постоянной времени

$$T=\frac{1}{RC}.$$

Звено второго порядка

Дифференциальное уравнение данного звена

$$T_1^2\frac{d^2x_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^2}+T_2\frac{dx_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt}+x_{\text{ВЫХ}}(t)=kx_{\text{ВХ}}(t).$$

В операторной форме оно представляет собой выражение

$$\left(T_1^2p^2+T_2p+1\right)X_{\text{ВЫХ}}(p)=kX_{\text{ВХ}}(p).$$

Отсюда его передаточная функция

$$W(p)=\frac{k}{T_1^2p^2+T_2p+1}.$$

Тип звена второго порядка определяется соотношением его постоянных времени T_1 и T_2, характеризующимся, в свою очередь, через ***коэффициент затухания***

$$\xi=\frac{T_2}{2T_1}.$$

Этот коэффициент является столь исчерпывающей характеристикой, что в литературе часто вместо T_1 вводят постоянную времени T=T Тогда в силу справедливости выражения

$$T_2=2\xi T_1,$$

получаем еще одно представление передаточной функции звена второго порядка

$$W(p)=\frac{k}{T^2p^2+2\xi Tp+1}.$$

Примером звена 2-го порядка является двигатель постоянного тока. Входным сигналом является напряжение на зажимах якоря $u_я(t)$, выходным – скорость вращения $\omega(t)$. Уравнения, описывающие работу двигателя:

$$\begin{cases} L_я\dfrac{di_я(t)}{dt}+R_яi_я(t)+k_Ф\Phi\omega(t)=u_я(t); \\ J\dfrac{d\omega(t)}{dt}=C\Phi i_я(t), \end{cases}$$

переводим в операторную форму:

$$\begin{cases} L_я pI_я(p)+R_яI_я(p)+k_Ф\Phi\Omega(p)=U_я(p); \\ Jp\Omega(p)=C\Phi I_я(p). \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$I_я(p)=\frac{Jp\Omega(p)}{C\Phi}.$$

Подставляем последнее выражение в первое уравнение системы:

$$L_яp^2\frac{J\Omega(p)}{C\Phi}+R_я\frac{Jp\Omega(p)}{C\Phi}+k_Ф\Phi\Omega(p)=U_я(p).$$

Выносим за скобки Ω(р) и получим выражение

$$\Omega(p)\left(L_я p^2 \frac{J}{C\Phi} + R_я \frac{Jp}{C\Phi} + k_\Phi \Phi\right) = U_я(p).$$

Отсюда передаточная функция

$$W(p) = \frac{\Omega(p)}{U_я(p)} = \frac{1}{L_я \frac{J}{C\Phi} p^2 + R_я \frac{J}{C\Phi} p + k_\Phi \Phi} =$$

$$= \frac{1/k_\Phi \Phi}{\frac{L_я J}{k_\Phi C\Phi^2} p^2 + \frac{R_я J}{k_\Phi C\Phi^2} p + 1}.$$

Таким образом, двигатель постоянного тока при условии постоянства магнитного потока (Φ=*const*) представляет собой звено 2-го порядка с параметрами:

$$k = 1/k_\Phi \Phi,\ T_1 = \sqrt{\frac{L_я J}{k_\Phi C\Phi^2}},\ T_2 = \frac{R_я J}{k_\Phi C\Phi^2}.$$