ЛАЧХ

Терминология

При исследовании САУ часто используются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) $L(\omega)$, показывающие усиление мощности сигнала при прохождении через звено (систему). При их построении по оси абсцисс откладывается $\lg\omega$ и соответствующие им значения частоты ω, а по оси ординат $L(\omega)$. В общем случае ЛАЧХ измеряется в белах. Нужно учитывать, что:

- 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз,
- 2 бела – в 100 раз,
- 3 бела – в 1000 раз.

Поскольку мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, а $\lg A^2 = 2\lg A$, то усиление мощности, выраженное в отношении амплитуд $A(\omega)$ равно $2\lg A(\omega)$. Соответственно в <u>децибелах</u>

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega). \qquad (11)$$

При этом для характерных точек соотношения между $A(\omega)$ и $L(\omega)$ следующие:

	0,001	0,01	0,1	0,316	0,89	1	1,12	3,16	10	100	1000
L, дб	-60	-40	-20	-10	-1	0	1	10	20	40	60

В качестве единицы измерения частоты используют логарифмическую единицу <u>декаду</u>. Считается, что частоты ω_1 и ω_2 отличаются на 1 декаду, если $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$.

Расположение графика ЛАЧХ выше оси абсцисс означает <u>усиление</u> выходного сигнала, поскольку при этом $20\lg A(\omega)>0$. Следовательно, $A(\omega)>1$,

откуда можно сделать вывод о том, что $\frac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}(\omega)}>1$. Другими словами, $A_{ВЫХ}(\omega)>A_{ВХ}(\omega)$. Соответственно расположение графика ЛАЧХ ниже оси абсцисс означает ослабление выходного сигнала $A_{ВЫХ}(\omega)<A_{ВХ}(\omega)$. А пропускание сигнала через звено (систему) без изменения амплитуды происходит на частоте среза ω_c, при которой $L(\omega_c)=0$ и, следовательно, $A_{ВЫХ}(\omega)=A_{ВХ}(\omega)$.

Точка $\omega=0$ лежит на оси частот слева в бесконечности, поскольку lg 0= -∞. Поэтому ось ординат проводят так, чтобы справа от оси ординат на оси частот размещалась та часть ЛАЧХ, особенности которой требуется исследовать.

Применение ЛАЧХ дает следующие преимущества.

Во-первых, для цепочки последовательно соединенных звеньев ПФ представляет собой произведение ПФ входящих в цепочку звеньев (подробно будет рассмотрено ниже) $W(p)=\prod_{i=1}^{n}W_i(p)$. Отсюда АФХ

$$W(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}W_i(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)\prod_{i=1}^{n}e^{j\varphi(\omega)}=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)\cdot e^{j\sum_{i=1}^{n}\varphi(\omega)}$$

Следовательно, АЧХ в обычном масштабе частот представляет собой произведение АЧХ всех составляющих

$$A(\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega), \tag{12}$$

а ФЧХ последовательного соединения – сумму ФЧХ всех составляющих

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega). \tag{13}$$

При логарифмировании выражение (12) превращается в сумму

$$20\lg A(\omega)=20\lg\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)=20\sum_{i=1}^{n}\lg A_i(\omega)=\sum_{i=1}^{n}L_i(\omega). \tag{14}$$

Следовательно, ЛАЧХ соединения можно получить как геометрическую сумму ЛАЧХ отдельных звеньев.

Во-вторых, при применении логарифмического масштаба кривизна характеристик изменяется, и в большинстве случаев возникает возможность упрощенно изображать частотные характеристики ломаными линиями. Это так называемые *асимптотические* характеристики.

Поскольку фазовый сдвиг последовательной цепочки представляет собой сумму фазовых сдвигов на отдельных ее звеньях (13), использование логарифмического масштаба на оси ординат фазовой характеристики не имеет смысла. Поэтому логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ) строится в полулогарифмических координатах в виде зависимости φ от $\lg\omega$, чтобы ЛАЧХ и ЛФЧХ были связаны одним масштабом по оси абсцисс.

ЛАЧХ типовых элементарных звеньев

П-звено

АЧХ данного звена имеет вид

$$A(\omega) = k.$$

Отсюда формула ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k,$$

независимо от частоты это постоянная величина. График проходит параллельно оси частот (рис. 1).

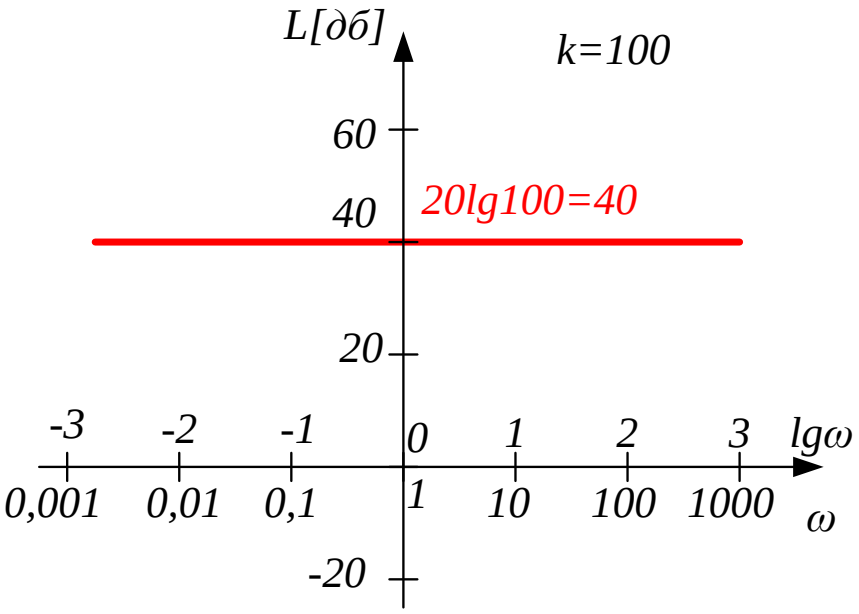

Рис. 1. ЛАЧХ П-звена с коэффициентом усиления k = 100

Апериодическое А-звено

Формула АЧХ данного звена

$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}.$$

Поэтому истинная ЛАЧХ апериодического звена описывается уравнением

$$L(\omega)=20\lg k-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

Построим асимптотическую ЛАЧХ. В полученном выражении $20\lg k$ – константа, не зависящая от частоты ω. В то же время второе слагаемое $\left(-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}\right)$ зависит от частоты, причем на малых и больших частотах эта зависимость совершенно разная. Поэтому можно сделать некоторые допущения.

Для этого выделим участки (рис. 2):

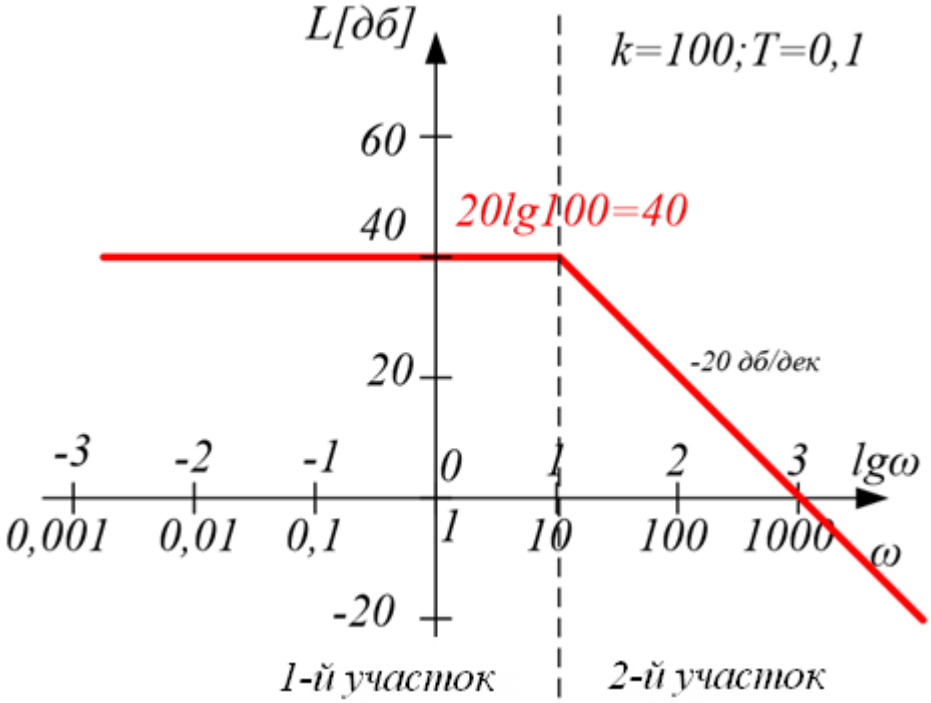

Рис. 2. ЛАЧХ А-звена с параметрами k = 100 и T = 0,1

- ***малые частоты*** $0 \le \omega \le \omega_0$, где $\omega_0 = \dfrac{1}{T}$ – ***сопрягающая частота***. Для области малых частот можно считать, что величина

$$T^2\omega^2 \ll 1,$$

следовательно, ею можно пренебречь:

$$20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1} \approx 20\lg 1 \approx 0.$$

Поэтому асимптотическая ЛАЧХ на этом участке

$$L_{a1}(\omega) = 20\lg k$$

представляет собой прямую, параллельную оси частот. Иными словами, при частотах, не превышающих *сопрягающую* частоту:

$$\omega \le \frac{1}{T},$$

апериодическое звено ведёт себя как пропорциональное, оно просто усиливает входной сигнал;

- ***большие частоты*** $\omega_0 \le \omega \le \infty$. Здесь можно считать, что

$$T^2\omega^2 \gg 1.$$

Следовательно, единицей можно пренебречь:

$$\sqrt{T^2\omega^2+1} \approx \sqrt{T^2\omega^2} = T\omega.$$

Поэтому асимптотическая ЛАЧХ на данном отрезке частот будет иметь вид

$$L_{a2}(\omega) = 20\lg k - 20\lg T\omega.$$

Определим её наклон на 1-ю декаду. Для этого возьмём произвольные частоты ω_1 и ω_2, отличающиеся друг от друга на декаду:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10,$$

и найдём наклон на одну декаду:

$$\Delta L = L_{a2}(\omega_2) - L_{a2}(\omega_1),$$

учитывая соотношение $\omega_2 = 10\omega_1$:

$$\Delta L = +20\lg k - 20\lg T\omega_2 - 20\lg k + 20\lg T\omega_1 =$$
$$= -20\lg T - 20\lg(10\omega_1) + 20\lg T + 20\lg\omega_1 =$$
$$= -20\lg 10 - 20\lg\omega_1 + 20\lg\omega_1 = -20\cdot 1 = -20.$$

Таким образом, получили наклон асимптотической ЛАЧХ на втором участке ΔL = - 20 дб/дек. Это постоянное число, не зависящее от частоты. Следовательно, асимптотическая ЛАЧХ второго участка – ***прямая*** с указанным наклоном.

Ошибка по сравнению с истинной ЛАЧХ на малых частотах

$$\delta_1(\omega) = L(\omega) - L_{a1}(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} - 20\lg k =$$
$$= -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2},$$

а на больших –

$$\delta_2(\omega) = L(\omega) - L_{a1}(\omega) =$$
$$= 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} - (20\lg k - 20\lg T\omega) =$$
$$= -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} + 20\lg T\omega.$$

Максимальная ошибка будет иметь место на *сопрягающей частоте*

$$\delta_{\max} = \delta_1(\omega_0) = \delta_2(\omega_0) = -20\lg\sqrt{1+T^2\left(\frac{1}{T}\right)^2} =$$
$$= -20\lg\sqrt{1+1} = -20\lg\sqrt{2} \approx -3 \text{ дб},$$

причем она не зависит от параметров T и k. Малая величина данной ошибки позволяет сделать первичную оценку звена (определить *ча-*

стоту среза ω_c и диапазон частот, где происходит усиление входного сигнала) по его параметрам элементарным ***построением асимптотической ЛАЧХ*** (рис. 2). Для этого:

- на оси частот находится сопрягающая частота ω_0;
- на участке $\omega \le \omega_0$ проводится прямая, параллельная оси частот с ординатой, равной $20\lg k$;
- на участке $\omega > \omega_0$ через точку с координатами (ω_0; $20\lg k$) проводится прямая под наклоном (–20 дб/дек).

И-звено

ИИ-звено

АЧХ данного звена

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

Поэтому ЛАЧХ описывается выражением

$$L(\omega) = 20\lg\frac{k}{\omega} = 20\lg k - 20\lg\omega.$$

Это прямая (рис. 3) с наклоном на 1-ю декаду, рассчитываемым как

$$\Delta L = 20\lg k - 20\lg 10\omega_1 - 20\lg k + 20\lg\omega_1 = -20 \text{ дб/дек.}$$

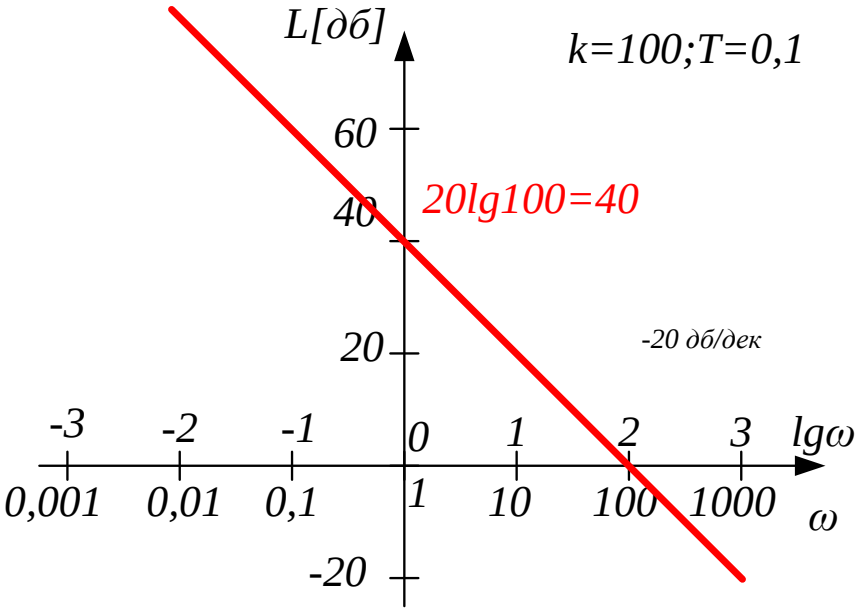

Рис. 3. ЛАЧХ ИИ-звена с k = 100

Ось абсцисс ЛАЧХ пересекает на частоте среза ω_c при выполнении условия

$$L(\omega_c)=0,$$

следовательно,

$$20\lg k = 20\lg\omega_c .$$

Таким образом, для ИИ-звена $\omega_c = k$.

Построение ЛАЧХ ИИ-звена сводится к построению прямой с наклоном -20 дб/дек в точке с координатами $(\omega_c;k)$ – рис. 3. Ось ординат, проведенную через частоту ω=1, ЛАЧХ пересекает в точке с ординатой

$$L(1)=20\lg k-20\lg 1=20\lg k .$$

Реальное интегрирующее звено

АЧХ РИ-звена:

$$A(\omega)=\frac{k}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}} .$$

Его ЛАЧХ описывается уравнением

$$L(\omega)=20\lg k-20\lg\omega-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} .$$

Применив такие же допущения для малых и больших частот, какие сделаны для А-звена, построим асимптотическую ЛАЧХ РИ-звена по участкам (рис. 4):

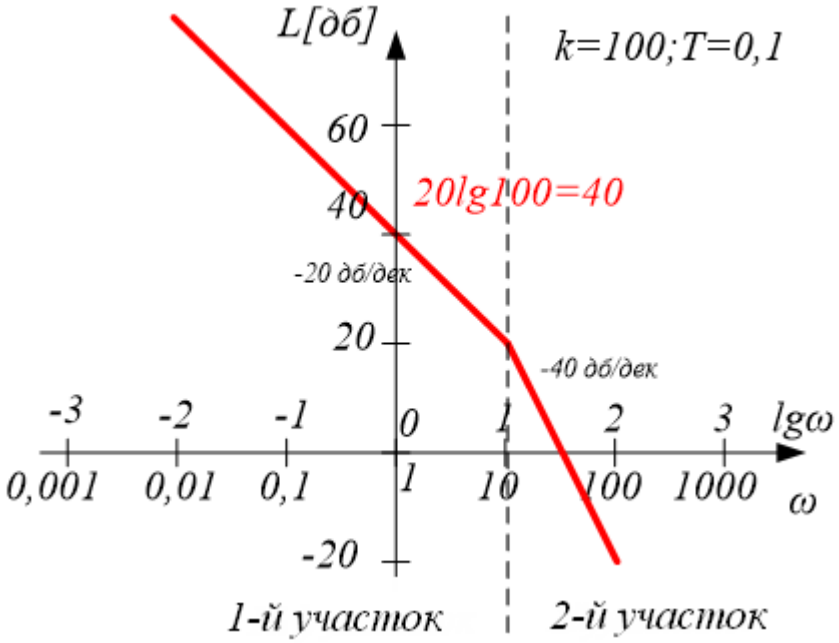

Рис. 4. ЛАЧХ РИ-звена с параметрами k = 100, T = 0,1

- ***малые частоты*** $0 \le \omega \le \frac{1}{T}$ - здесь формула асимптотической ЛАЧХ:

$$L_{a1}(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega$$

совпадает с ЛАЧХ ИИ-звена, имеет наклон –20 дб/дек. Иными словами, при частотах, не превышающих *сопрягающую частоту* $\omega_0 = \frac{1}{T}$, РИ-звено ведёт себя так же, как ИИ-звено;

- ***большие частоты*** $\frac{1}{T} \le \omega \le \infty$:

$$L_{a2}(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{T^2\omega^2} =$$

$$= 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg T - 20\lg\omega = 20\lg\frac{k}{T} - 40\lg\omega.$$

Найдем наклон асимптотической ЛАЧХ на одну декаду:

$$\Delta L = 20\lg\frac{k}{T} - 40\lg(10\omega_1) - 20\lg\frac{k}{T} + 40\lg\omega_1 =$$

$$= -40\lg 10 - 40\lg\omega_1 + 40\lg\omega_1 = -40 \text{ дб/дек.}$$

Ошибка между асимптотической и истинной ЛАЧХ на ***малых частотах***

$$\delta_1(\omega) = L(\omega) - L_{a1}(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} -$$

$$-20\lg k - 20\lg\omega = -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2},$$

на ***больших*** –

$$\delta_2(\omega) = L(\omega) - L_{a2}(\omega) =$$

$$= 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} - 20\lg k + 20\lg T + 40\lg\omega =$$

$$= 20\lg T\omega - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

Максимальная ошибка будет иметь место на *сопрягающей частоте*

$$\delta_{\max} = \delta_1(\omega_0) = \delta_2(\omega_0) = -20\lg\sqrt{1+T^2\left(\frac{1}{T}\right)^2} =$$

$$= -20\lg\sqrt{1+1} = -20\lg\sqrt{2} \approx -3 \text{ дб.}$$

Таким образом, как и для апериодического звена, первичную оценку ЧХ РИ-звена по его параметрам можно осуществить с помощью построения ***асимптотической*** ЛАЧХ (рис. 9):

- на оси частот находится *сопрягающая частота* $\omega_0 = \dfrac{1}{T}$;
- на участке $\omega \le \omega_0$ проводится прямая под наклоном (–20 дб/дек) через точку (ω=1; 20*lgk*) до пересечения с прямой ω = ω_0;
- вправо от полученной точки, на участке $\omega > \omega_0$, проводится прямая под наклоном (– 40 дб/дек).

На рис. 4 показана ЛАЧХ РИ-звена с параметрами k = 100, T = 0,1. Для него частота ω = 1, через которую проведена ось ординат, принадлежит участку малых частот.

На рис. 5 показан пример ЛАЧХ для РИ-звена с параметрами k = 100, T = 10. Для него частота ω = 1, через которую проведена ось ординат, принадлежит участку больших частот, но продолжение ЛАЧХ первого участка (показано пунктиром) все равно пересекает ось ординат на значении $20\lg k = 20\lg 100 = 40$.

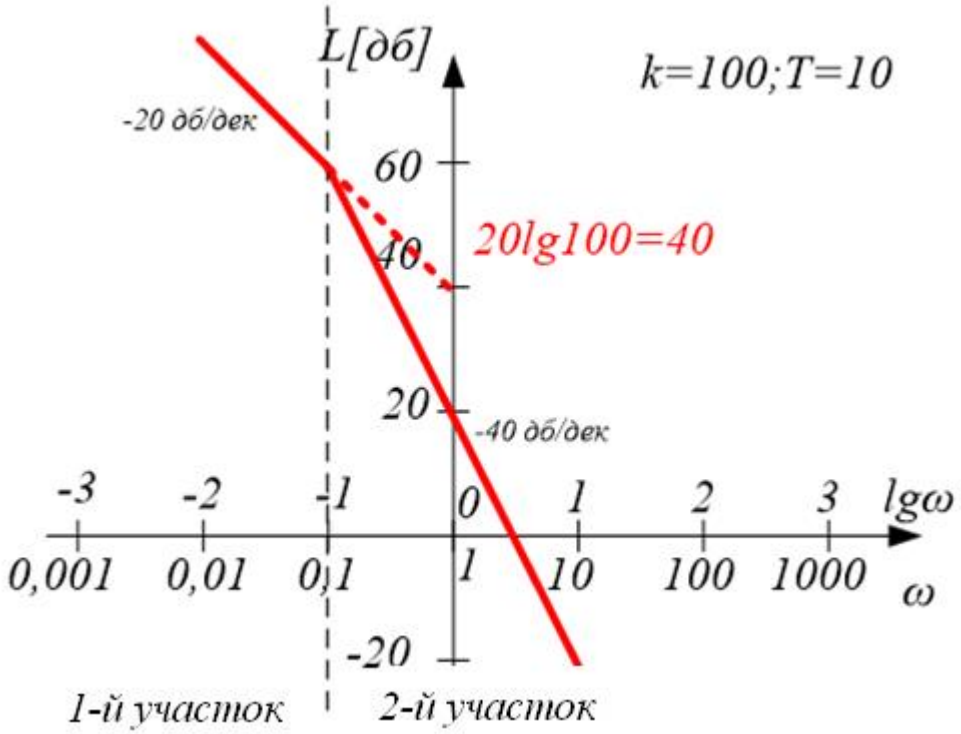

Рис. 5. ЛАЧХ РИ-звена с параметрами k = 100, T = 10

Д-звено

ИД-звено

АЧХ описывается уравнением

$$A(\omega) = k\omega.$$

ЛАЧХ данного звена описывается уравнением

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k + 20\lg\omega.$$

Найдем её наклон на одну декаду:

$$\Delta L = 20\lg k + 20\lg(10\omega_1) - 20\lg k - 20\lg\omega_1 = 20\lg 10 = 20 \text{ дб/дек.}$$

Для *частоты среза* справедливо соотношение $L(\omega_c) = 0$ или

$$20\lg k + 20\lg\omega = 0.$$

Отсюда получаем простейшее уравнение:

$$\lg k = -\lg\omega_c,$$

из которого определяем *частоту среза*:

$$\omega_c = \frac{1}{k}.$$

Для построения ЛАЧХ ИД-звена на оси абсцисс находим $\omega_c = \frac{1}{k}$ и проводим прямую с наклоном +20дб/дек. Очевидно, что если $k < 1$, то $\omega_c = \frac{1}{k} > 1$, следовательно, пересечение с осью $\omega = 1$ $(\lg\omega = 0)$ будет расположено в отрицательной полуплоскости (прямая 1 на рис. 6), поскольку для указанных условий $\lg k < 0$. Если $k > 1$, то $\omega_c = \frac{1}{k} < 1$, следовательно, пересечение с осью $\omega = 1\,(\lg\omega = 0)$ **будет** расположено в отрицательной полуплоскости (прямая 2 на рис. 6), поскольку для указанных условий $\lg k > 0$.

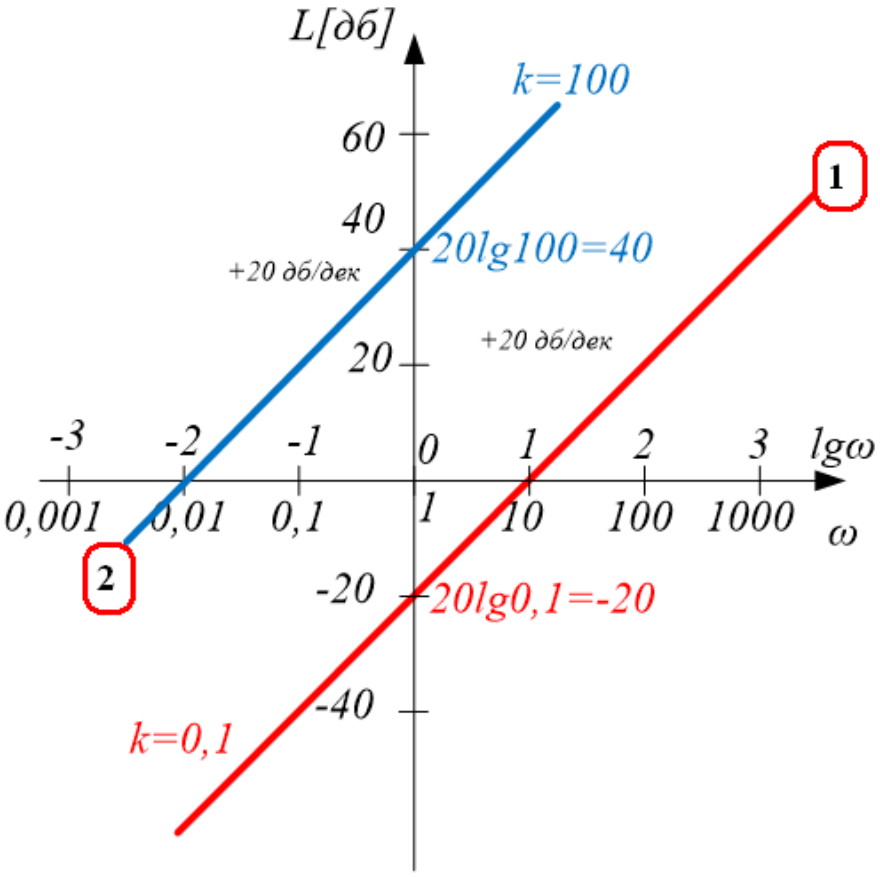

Рис. 6. ЛАЧХ ИД-звена с параметрами k = 100 и T = 0,1

РД-звено

Уравнение АЧХ данного звена

$$A(\omega) = \omega k \cdot \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}};$$

ЛАЧХ данного звена описывается уравнением

$$L(\omega) = 20\lg(k) + 20\lg(\omega) - 20\lg\left(\sqrt{1+T^2\omega^2}\right).$$

Как и в рассмотренных ранее случаях, построение асимптотической ЛАЧХ осуществляется по участкам (рис. 7):

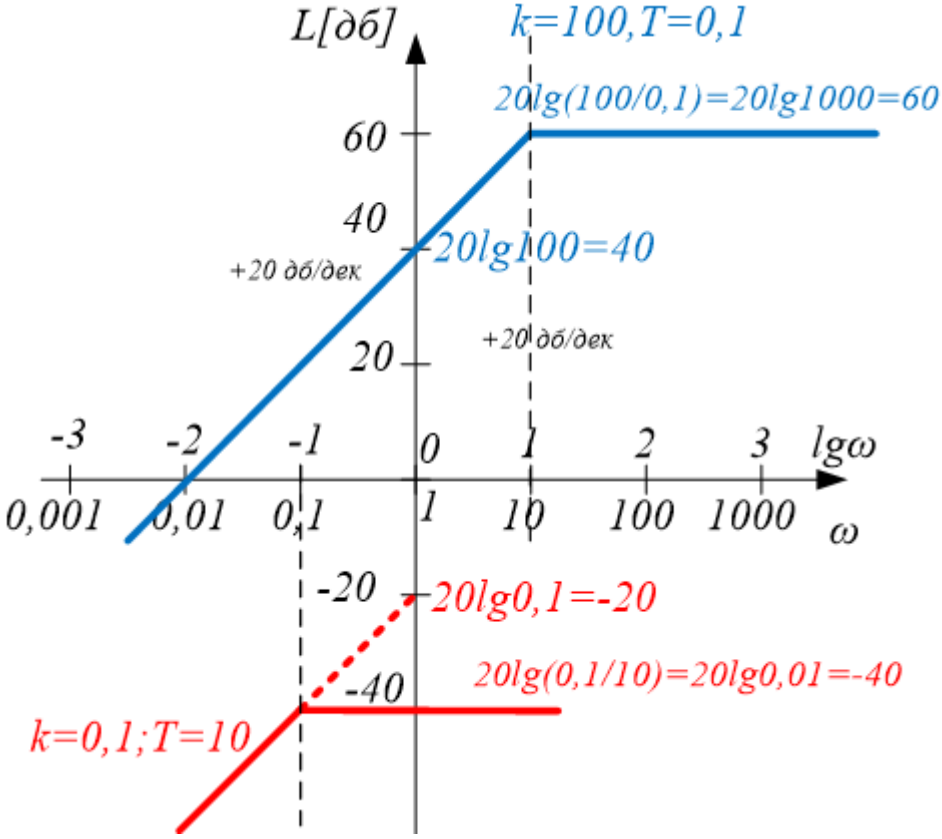

Рис. 7. ЛАЧХ РД-звеньев с k = 100, T = 0,1 и k = 0,1, T = 10

- ***малые частоты*** $0 \le \omega \le \omega_0$.

С применением тех же допущений уравнение асимптотической ЛАЧХ реального Д-звена на этом участке приобретает вид

$$L_a(\omega) = 20\lg(k) + 20\lg(\omega),$$

совпадающий с видом ЛАЧХ идеального Д-звена, имеющей наклон +20 дб/дек.

Иными словами, при частотах, не превышающих *сопрягающую частоту* ω_0, РД-звено ведёт себя как ИД-звено.

Очевидно, если *частота среза* ω_c принадлежит данному отрезку частот, то она равна

$$\omega_c = \frac{1}{k};$$

- ***большие частоты*** $\omega_0 \le \omega \le \infty$.

В этом случае уравнение асимптотической ЛАЧХ на данном отрезке частот будет иметь вид:

$$L_a(\omega) = 20\lg k + 20\lg\omega - 20\lg T\omega = 20\lg\frac{k}{T}$$

– это прямая, параллельная оси абсцисс.

Лучше начинать построение асимптотической ЛАЧХ со второго участка, с прямой, параллельной оси частот. Рассчитываем $20\lg(k/T)$ и проводим прямую до границы участков. Потом достраиваем первый участок с наклоном +20 дб/дек.

Ошибка при построении асимптотической ЛАЧХ

Истинные ЛАЧХ всех реальных звеньев (А-, РИ- и РД-) отличаются от асимптотических на величину ошибки:

$$\delta(\omega) = L(\omega) - L_a(\omega).$$

На малых частотах

$$\delta_1(\omega) = L(\omega) - L_{a1}(\omega) = -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

На больших частотах

$$\delta_2(\omega) = L(\omega) - L_{a2}(\omega) = -20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2} + 20\lg T\omega.$$

Максимальная ошибка будет иметь место на *сопрягающей частоте*:

$$\delta_{\max} = \delta_1(\omega_0) = \delta_2(\omega_0) = -20\lg\sqrt{1+T^2\cdot\left(\frac{1}{T}\right)^2} =$$

$$= -20\lg\sqrt{1+1} = -20\lg\sqrt{2} \approx -3 \text{ дб}.$$

На частотах, отличающихся от сопрягающей на одну декаду, ошибка будет очень маленькой. Так, для частоты $0{,}1\omega_0$, относящейся к области малых частот:

$$\delta_1(0{,}1\omega_0) = -20\lg\sqrt{1 + T^2 \cdot 0{,}01 \cdot \left(\frac{1}{T}\right)^2} = -20\lg\sqrt{1{,}01} = -0{,}04 \text{ дб.}$$

А для частоты $10\omega_0$, относящейся к области больших частот:

$$\delta_2(10\omega_0) = -20\lg\sqrt{1 + T^2 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{T^2}\right)^2} + 20\lg T \cdot 10 \cdot \frac{1}{T} =$$

$$= -20\lg\sqrt{101} + 20\lg 10 = -201 + 200 = -1,$$

что при наклоне -20 или -40 дб практически не заметно визуально.