## Частотные характеристики САУ

***Частотные характеристики (ЧХ)*** описывают установившиеся вынужденные колебания на выходе звена, вызванные гармоническим воздействием на его входе. В том случае, когда на вход линейной САУ подается периодический гармонический сигнал некоторой частоты **ω=*const***:

$$x_{вх}(t) = A_{вх} e^{j\omega t} = A_{вх}\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right), \qquad (1)$$

по истечении устойчивого (затухающего) переходного процесса на выходе САУ установятся вынужденные периодические колебания, описываемые в экспоненциальной форме как

$$x_{вых}(t) = A_{вых} e^{j(\omega t+\varphi)} = A_{вых} e^{j\omega t} e^{j\varphi}. \qquad (2)$$

Эти колебания совершаются *с той же частотой* ω, что и входные колебания, но с *другой* амплитудой $A_{вых}$ и *сдвигом фазы* относительно входного сигнала на некоторый угол φ (рис. 1).

Как уже рассматривалось ранее, в общем случае САУ описывается ДУ вида

$$a_n \frac{d^n x_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx_{вых}(t)}{dt} + a_0 x_{вых}(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m x_{вх}(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x_{вх}(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1\frac{dx_{вх}(t)}{dt} + b_0 x_{вх}(t). \qquad (3)$$

Подставим выражения для входного (1) и выходного (2) сигналов в (3). Для этого необходимо получить их производные. Производные гармонического входного сигнала:

$$\frac{dx_{вх}(t)}{dt} = j\omega A_{вх} e^{j\omega t};$$

$$\frac{d^2 x_{вх}(t)}{dt^2} = j\omega\cdot j\omega A_{вх} e^{j\omega t} = (j\omega)^2 A_{вх} e^{j\omega t}; \qquad (4)$$

$$\ldots$$

$$\frac{d^{m-1}x_{вх}(t)}{dt^{m-1}} = (j\omega)^{m-1} A_{вх} e^{j\omega t};$$

$$\frac{d^m x_{вх}(t)}{dt^m} = (j\omega)^m A_{вх} e^{j\omega t}.$$

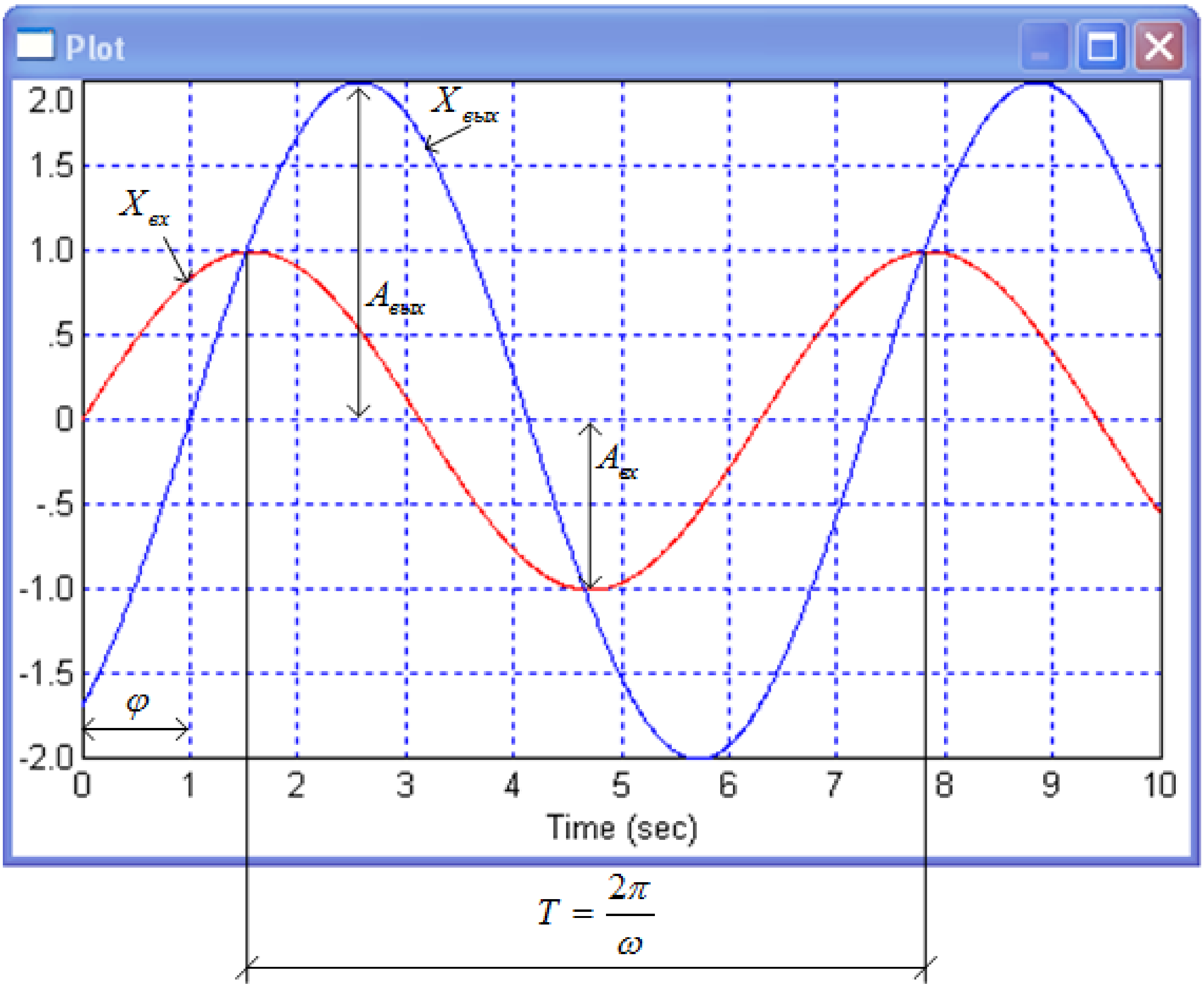


Рис. 1. Соотношение входного и выходного гармонических сигналов

Производные для выходного сигнала:

$$\frac{dx_{вых}(t)}{dt} = j\omega \cdot e^{j\varphi} A_{вых} e^{j\omega t};$$

$$\frac{d^2 x_{вых}(t)}{dt^2} = (j\omega)^2 e^{j\varphi} A_{вых} e^{j\omega t}; \qquad (5)$$

$$\dots$$

$$\frac{d^{n-1} x_{вых}(t)}{dt^{n-1}} = (j\omega)^{n-1} \cdot e^{j\varphi} \cdot A_{вых} e^{j\omega t};$$

$$\frac{d^n x_{вых}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \cdot e^{j\varphi} \cdot A_{вых} e^{j\omega t}.$$

Подстановка выражений ( 1), ( 2), ( 4) и ( 5) в ( 3) даст уравнение

$$a_n(j\omega)^n e^{j\varphi} A_{\text{вых}} e^{j\omega t} + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} e^{j\varphi} A_{\text{вых}} e^{j\omega t} + \ldots +$$
$$+a_2(j\omega)^2 e^{j\varphi} A_{\text{вых}} e^{j\omega t} + a_1(j\omega) e^{j\varphi} A_{\text{вых}} e^{j\omega t} + a_0 e^{j\varphi} A_{\text{вых}} e^{j\omega t} =$$
$$= b_m(j\omega)^m A_{\text{вх}} e^{j\omega t} + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} A_{\text{вх}} e^{j\omega t} + \ldots +$$
$$+b_2(j\omega)^2 A_{\text{вх}} e^{j\omega t} + b_1(j\omega) A_{\text{вх}} e^{j\omega t} + b_0 A_{\text{вх}} e^{j\omega t}.$$

Оно преобразуется к виду:

$$e^{j\varphi} A_{\text{вых}} e^{j\omega t} \left[ a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 j\omega + a_0 \right] =$$
$$= A_{\text{вх}} e^{j\omega t} \left[ b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1 j\omega + b_0 \right].$$

Откуда получаем выражение

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} e^{j\varphi}. \qquad (\ 6)$$

Выражение ( 6) выведено для некоторого значения **ω=*const***. Оно содержит отношение амплитуд выходного и входного сигналов и учитывает сдвиг фаз между ними, рассчитанное для этой частоты **ω=*const***. Если сделать аналогичные расчеты для других значений частоты при изменении **ω *от 0 до* +∞*,*** получим ***зависимость*** отношения амплитуд выходного и входного сигналов и сдвига фаз ***от частоты.*** Данная зависимость называется ***амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ)****, или* ***амплитудно-фазочастотной характеристикой (АФЧХ)*** и рассчитывается по формуле, аналогичной ( 6) для значений частоты **ω *от 0 до* +∞*:***

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (\ 7)$$

***А(ω) – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)*** *– показывает, как изменяется отношение амплитуд выходного и входного сигналов при изменении частоты* **ω *от 0 до* +∞*.***

**φ(ω)** – ***фазочастотная характеристика (ФЧХ)*** *– показывает, как изменяется сдвиг выходного сигнала относительно входного при изменении частоты* **ω *от 0 до* +∞*.***

Вследствие идентичности формулы ( 7) и выражения для передаточной функции

$$W(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}$$

получение формулы АФЧХ сводится к замене в формуле передаточной функции комплексной переменной $p$ на выражение $j\omega$.

Очевидно, что АФЧХ – это комплексное число, из которого можно выделить действительную и мнимую части по правилам арифметики комплексных чисел (рис. 2):

$$W(j\omega)=R(\omega)+jI(\omega). \tag{8}$$

Здесь $R(\omega)$ – действительная, а $I(\omega)$ – мнимая частотная характеристики, где

$$A(\omega)=\sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)} \tag{9}$$

– формула АЧХ, а

$$\varphi(j\omega)=arctg\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right) \tag{10}$$

– формула ФЧХ.

Графическим представлением АФЧХ является ***годограф*** – геометрическое место на комплексной плоскости конца вектора с амплитудой $A(\omega)$ и углом $\varphi(\omega)$ при изменении частоты $\omega$ от 0 до $+\infty$.

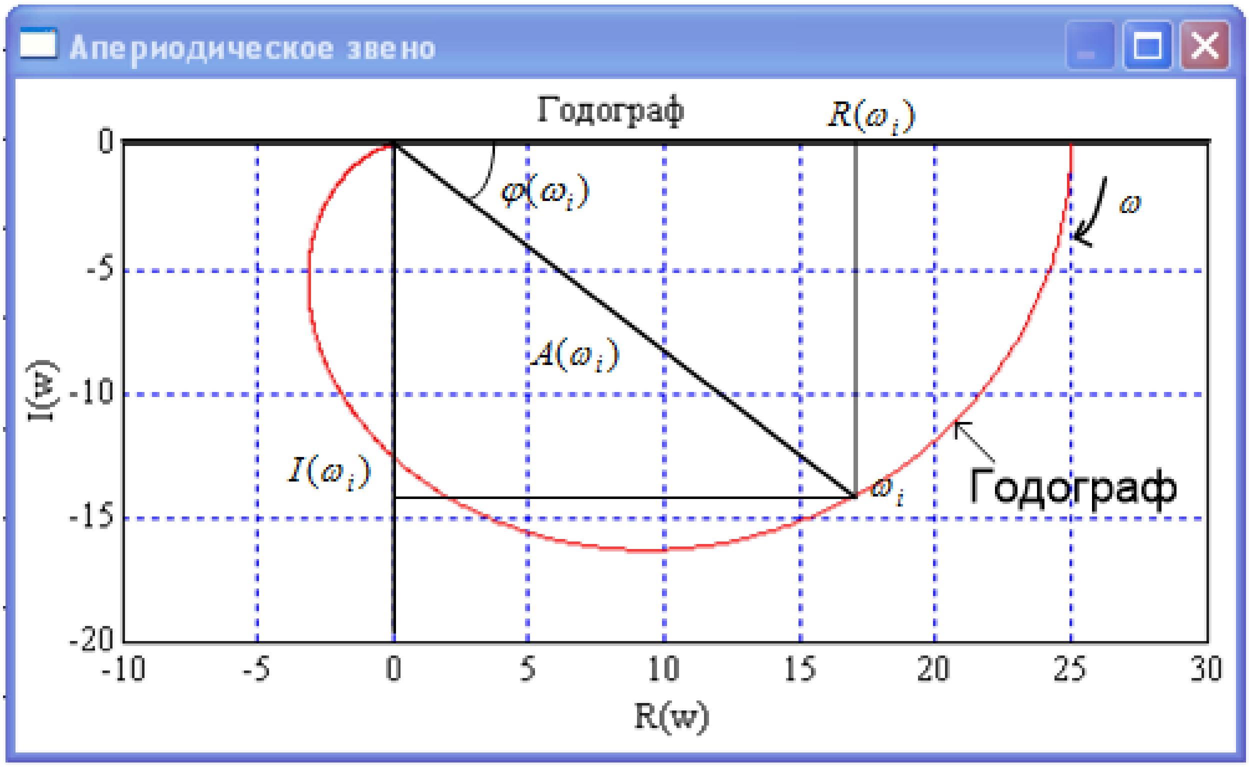


Рис. 2. Соотношение частотных характеристик