ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Модуль

Устойчивость линейных САУ

Критерий Гурвица

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Критерий устойчивости Гурвица (1985 г.) формулирует условия устойчивости в форме определителей.

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Из коэффициентов характеристического уравнения *n*-го порядка составляется ***<u>главный определитель Гурвица</u>*** по следующим правилам:

1. По главной диагонали слева вниз направо выписываются все коэффициенты уравнения, кроме коэффициента при высшей степени.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}
a_{n-1} & & & & & & & & & \\
 & a_{n-2} & & & & & & & & \\
 & & a_{n-3} & & & & & & & \\
 & & & a_{n-4} & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & a_4 & & & & \\
 & & & & & & a_3 & & & \\
 & & & & & & & a_2 & & \\
 & & & & & & & & a_1 & \\
 & & & & & & & & & a_0
\end{vmatrix}$$

От главной диагонали <u>вверх</u> столбцы заполняют коэффициентами с <u>убывающими</u> индексами.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & & & & & & \\
 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & & & & & & \\
 & & a_{n-3} & a_{n-5} & & & & & & \\
 & & & a_{n-4} & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & a_4 & a_2 & a_0 & & \\
 & & & & & & a_3 & a_1 & & \\
 & & & & & & & a_2 & a_0 & \\
 & & & & & & & & a_1 & \\
 & & & & & & & & & a_0
\end{vmatrix}$$

От главной диагонали <u>вниз</u> столбцы заполняются коэффициентами с <u>возрастающими</u> индексами.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & & & & & \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & & & & & \\
 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & & & & & \\
 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & & & & \\
 & & a_{n-1} & a_{n-3} & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & a_4 & a_2 & a_0 & & \\
 & & & & a_5 & a_3 & a_1 & & \\
 & & & & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & \\
 & & & & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & \\
 & & & & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0
\end{vmatrix}$$

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Остальные места определителя заполняются нулями.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & & & & & \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & & & & & \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & & & & & \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & & & & \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ & & & & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ & & & & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ & & & & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ & & & & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Выделяя в главном определителе Гурвица диагональные миноры, получаем вспомогательные определители Гурвица:

$$\Delta_{n-1} = \left| a_{n-1} \right|$$

$$\Delta_{n-2} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{n-3} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & & & & & \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & & & & & \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & & & & & \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & & & & \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ & & & & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ & & & & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ & & & & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ & & & & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Формулировка критерия:

чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы определитель Гурвица и его диагональные миноры
были *положительными*.

***Практически** после проверки знака всех коэффициентов характеристического уравнения составляют определители, начиная с наименьшего.*

Если он меньше 0, проверяют знак следующего и т.д.

Если какой - либо из определителей меньше 0, то дальнейшие вычисления бессмысленны, т.к. система уже неустойчива.

Для САУ 1 порядка

характеристическое уравнение $a_1 p + a_0 = 0.$

Определитель Гурвица $\Delta = a_0 > 0.$

Таким образом, для системы первого порядка при выполнении необходимого условия устойчивости

$$a_1 > 0, a_0 > 0.$$

единственный определитель будет заведомо *положительным*

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Для САУ 2 порядка

характеристическое уравнение $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$

Определитель Гурвица $\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0.$

Минор $\Delta_1 = a_1 > 0.$

Таким образом, для системы второго порядка при выполнении необходимого условия устойчивости

$$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0.$$

и определитель, и единственный минор будут заведомо *положительными*

Для САУ 3 порядка

характеристическое уравнение

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Определитель Гурвица

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Наименьший минор

$$\Delta_2 = a_2 > 0$$

Следующий минор

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0$$

Значение определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_3 a_0^2 > 0$$

Таким образом, система третьего порядка при выполнении необходимого условия будет устойчива только при соблюдении следующих соотношений между коэффициентами характеристического уравнения:

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \quad a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0. \quad a_2 a_1 a_0 - a_3 a_0^2 > 0;$$

Графическая интерпретация критерия Гурвица

Способ графической интерпретации критерия Гурвица позволяет наглядно оценить влияние того или иного параметра САУ на её устойчивость.

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Для выполнения этой задачи:

- **выбирают параметр, влияние которого на устойчивость будут исследовать; остальные параметры оставляют неизменными.**
- **Фиксируют значение параметра** λ_1 **рассчитывают для него значения определителей**

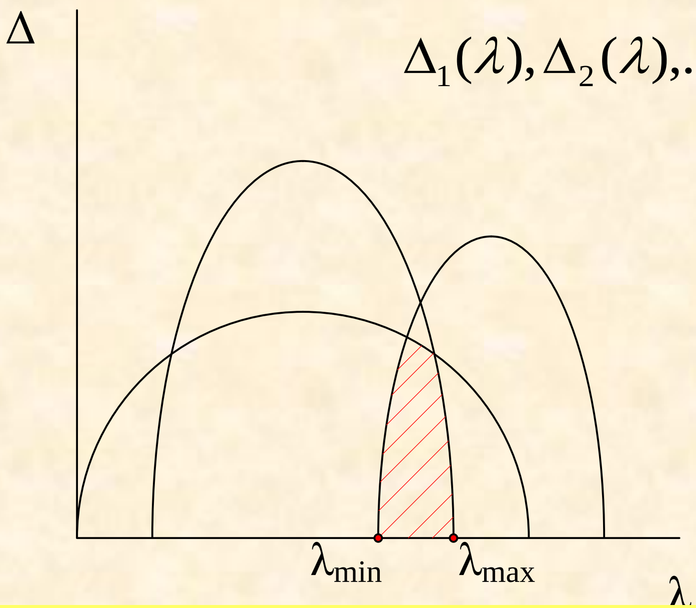
$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n.$$

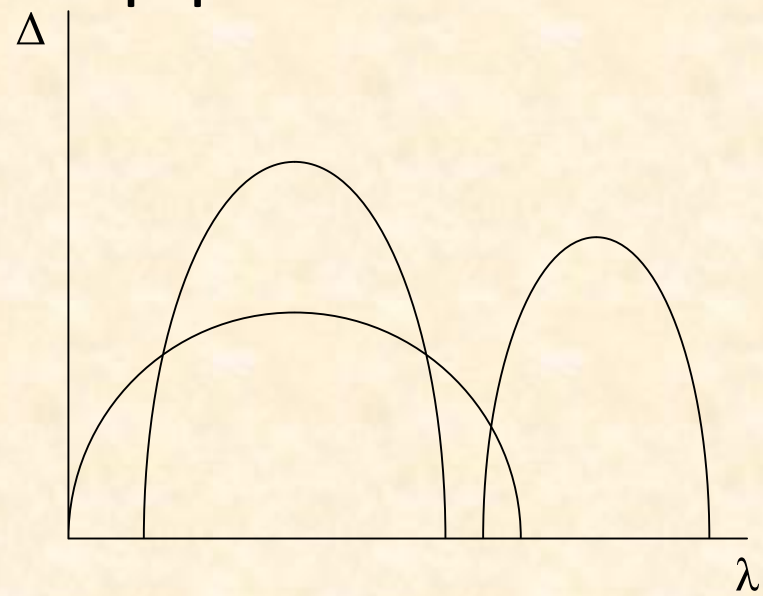
- **берут следующие значения параметра и вновь рассчитывают**

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n.$$

- **в прямоугольной системе координат строят графики**

$$\Delta_1(\lambda), \Delta_2(\lambda), \ldots, \Delta_n(\lambda).$$





Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru