ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Модуль

Устойчивость линейных САУ

Критерии устойчивости

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

<u>Критерии устойчивости</u> – это правила, позволяющие определять устойчивость САУ без вычисления корней характеристического уравнения.

- Виды критериев
  - Алгебраические
    - Критерий Гурвица
    - Критерий Рауса
    - Критерий Льенара-Шипара
    - Критерий Вышнеградского
  - Частотные
    - Критерий Михайлова
    - Критерий Найквиста
    - Логарифмический критерий

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Алгебраические критерии устойчивости

Позволяют судить об устойчивости по коэффициентам характеристического уравнения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Необходимое условие устойчивости САУ любого порядка – это положительность всех коэффициентов характеристического уравнения

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, \ldots, a_1 > 0, a_0 > 0$$

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Для <u>вещественных</u> корней: $p_i = \beta_i$

Характеристическое уравнение можно представить в виде:

$$a_0(p-\beta_1)(p-\beta_2)\ldots(p-\beta_n)=0$$

При отрицательных корнях оно преобразуется как

$$a_0(p+|\beta_i|)(p+|\beta_2|)\ldots(p+|\beta_n|)=0$$

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Для <u>комплексных</u> корней: $p_i = \beta_i \pm j\omega_i$

Характеристическое уравнение для корней с отрицательной вещественной частью можно представить в виде:

$$a_0(p+|\beta_n|-j\omega_n)(p+|\beta_n|+j\omega_n)...(p+|\beta_i|)+...+(p+|\beta_1|)=0$$

Используя соотношения разности квадратов -

$$a_0((p+|\beta_n|)^2+\omega_0^2)...(p+|\beta_i|)+...+(p+|\beta_1|)=0$$

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Для САУ 1 порядка

характеристическое уравнение $a_1 p + a_0 = 0.$

Единственный его корень определяется по формуле

$$p = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Очевидно, что он может быть отрицательным только при выполнении условия положительности коэффициентов характеристического уравнения:

$$a_1 > 0, a_0 > 0.$$

Таким образом, для системы первого порядка <u>необходимое</u> условие устойчивости является и <u>достаточным</u> условием устойчивости, т.к. при <u>*положительных*</u> коэффициентах характеристического уравнения его <u>корень является *левым*</u> (т.е. лежит в левой части комплексной плоскости).

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Для САУ 2 порядка

характеристическое уравнение $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$

Его корни определяются по формуле

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2};$$

Очевидно, что их вещественная часть может быть отрицательной только при выполнении условия положительности коэффициентов характеристического уравнения:

$$a_1 > 0, a_2 > 0.$$

Таким образом, и для системы второго порядка <u>необходимое</u> условие устойчивости является и <u>достаточным</u> условием устойчивости, т.к. при <u>*положительных*</u> коэффициентах характеристического уравнения оба его <u>корня *левые*</u>.

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Для САУ 3 порядка

характеристическое уравнение $a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$

Его корни находить не будем, проанализируем только их свойства, допустив, что они равны

$$p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2 - j\omega, p_3 = \alpha_2 + j\omega.$$

Рассмотрим свойства корней кубического уравнения при выполнении необходимого условия устойчивости (все коэффициенты характеристического уравнения положительны):

1) $p_1 + p_2 + p_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} < 0$ - может быть получено при

$$p_1 + p_2 + p_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + j\omega + \alpha_2 - j\omega = \alpha_1 + 2\alpha_2 < 0,$$

2) $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{p_3} = -\dfrac{a_1}{a_0} < 0$ - может быть получено при

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2 - j\omega} + \frac{1}{\alpha_2 + j\omega} = \frac{(\alpha_2 - j\omega)(\alpha_2 + j\omega) + \alpha_1(\alpha_2 + j\omega) + \alpha_1(\alpha_2 - j\omega)}{\alpha_1(\alpha_2^2 + \omega^2)} \equiv \frac{\alpha_2^2 + \omega^2 + 2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2^2 + \omega^2)} < 0,$$

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

<u>Для САУ 3 порядка (продолжение)</u>

3) $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = -\frac{a_3}{a_0} < 0.$ **- может быть получено при**

$$\alpha_1(\alpha_2 - j\omega)(\alpha_2 + j\omega) = \alpha_1(\alpha_2^2 + \omega^2) < 0$$

если $\alpha_1 < 0$ **, при этом** α_2 **может оказаться и положительным.**

Таким образом, для систем третьего и выше порядка <u>необходимое</u> условие устойчивости <u>не</u> является <u>достаточным</u> условием устойчивости, т.к. при <u>*положительных*</u> коэффициентах характеристического уравнения оно может иметь <u>*правые*</u> <u>корни</u>.

Для рассмотренного примера дополнительными условиями являются соотношения между корнями характеристического уравнения:

$$\alpha_1 < -2\alpha_2; \qquad \frac{\alpha_2^2 + \omega^2 + 2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2^2 + \omega^2)} < 0; \qquad \alpha_1(\alpha_2^2 + \omega^2) < 0.$$

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru