ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Модуль

Устойчивость линейных САУ

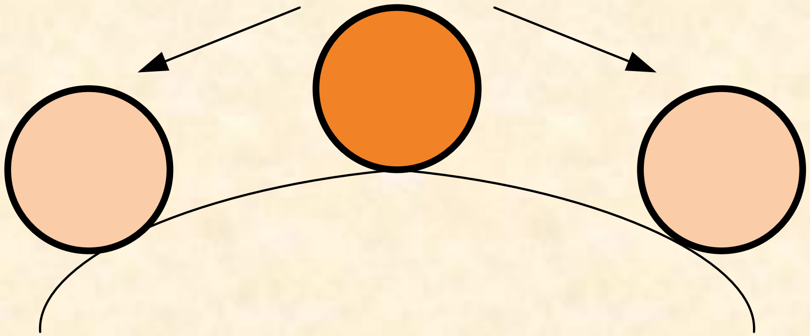
Основные термины и определения

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

<u>Устойчивость САУ</u> – способность системы с определенной точностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели её из этого состояния

<u>Неустойчивая САУ</u> **– не возвращается в состояние равновесия, т.е.:**

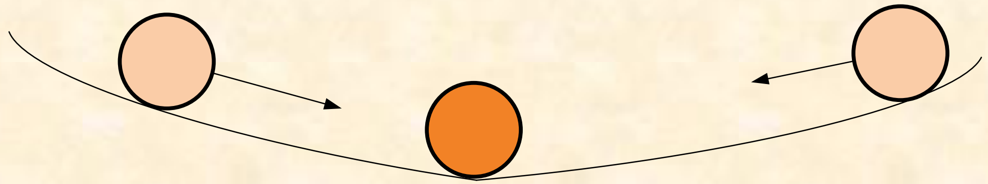
- **либо <u>неограниченно удаляется</u> от устойчивого состояния,**
- **либо совершает вокруг этого состояния <u>недопустимо большие колебания</u>.**



Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Различают устойчивость «в малом», «в большом», в «целом»

САУ устойчива *в малом*, если у неё есть область устойчивости, границы которой не определены

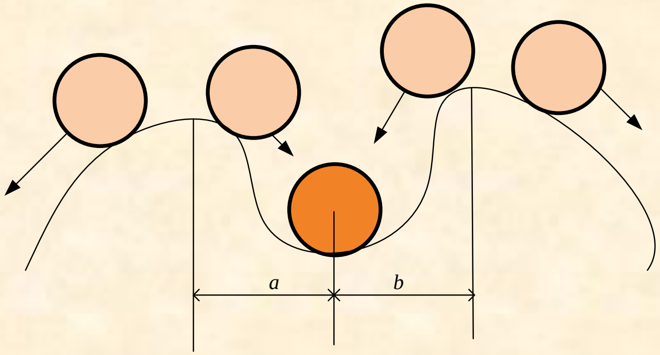


Если устойчивость САУ можно оценить с помощью линейных ДУ, то ее называют устойчивой «в малом». Границы отклонения не рассматривают, а ставят лишь условия достаточной малости этих отклонений.

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Различают устойчивость «в малом», «в большом», в «целом»

САУ устойчива ***в большом***, если у неё есть область устойчивости, имеющей определенные границы (нелинейные САУ)



Система, устойчивая «в большом» будет устойчива «в малом». Система, устойчивая «в малом», может оказаться неустойчивой «в большом».

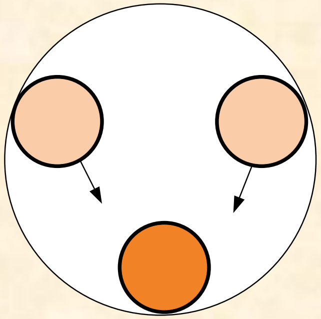
Когда устойчивость САУ без ограничения значений отклонения координат можно оценить с помощью нелинейных ДУ, ее называют устойчивостью «в большом». Этому вопросу посвящена теория нелинейных САУ

Анализ устойчивости «в малом» большинства реальных (нелинейных) САУ показывает, что в основном результаты, полученные при использовании метода линеаризации ДУ, оказываются приемлемыми по точности. Т.е. к большинству нелинейных САУ с достаточной степенью достоверности можно применить теорию линейных САУ.

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Различают устойчивость «в малом», «в большом», в «целом»

САУ устойчива ***в целом***, если она возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях



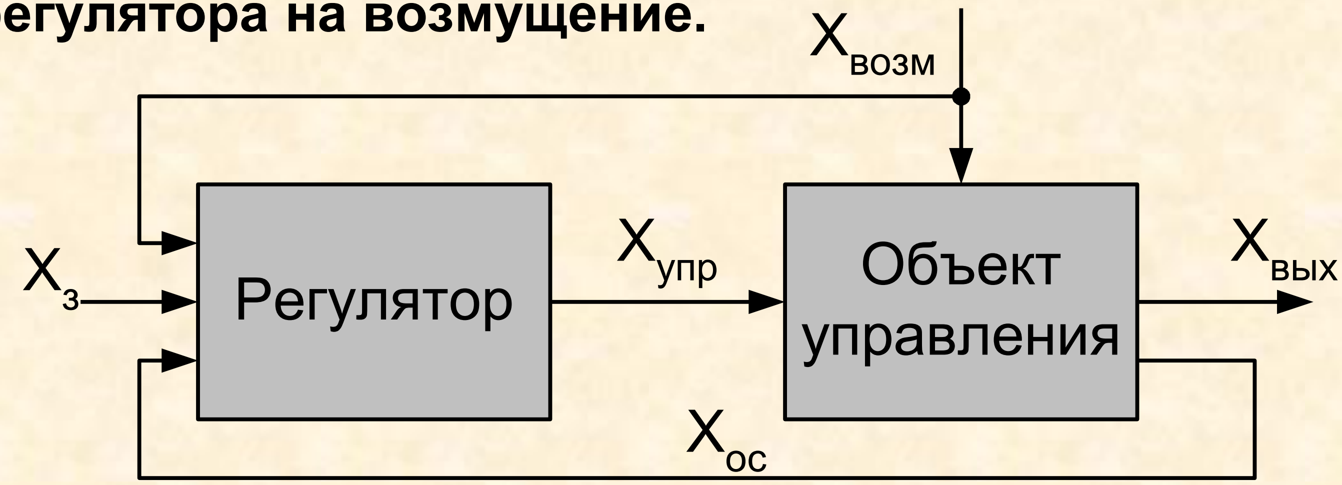
САУ, устойчивая «в целом», будет устойчива и «в большом» и «в малом»;

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Понятие устойчивости системы

САУ – это динамические системы, т.е.
процесс регулирования – это изменение во времени регулируемой величины под действием:

- **возмущения;**
- **реакции регулятора на возмущение.**



Устойчивость САУ – это способность системы поддерживать заданный регулируемый режим работы с определенной точностью и восстанавливать его при нарушении этого режима.

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Устойчивая система

Работоспособная САУ – это система, обеспечивающая сходящийся переходный процесс.

САУ, как любая динамическая система характеризуется <u>переходным процессом</u>, возникающим в ней при нарушении ее равновесия каким – либо воздействием:

$$X_{вых}(t) = X_c(t) + X_в(t);$$

где Xc (t) - свободные движения САУ, определяемые начальными условиями и свойствами самой системы;

Xв (t) - вынужденные движения САУ, определяемые возмущающим воздействием.

<u>В устойчивой системе</u> в переходном процессе свободная составляющая с течением времени должна стремиться к нулю:

$$\lim_{t \to \propto} X_c(t) \to 0.$$

Характер <u>свободного движения</u> САУ определяет ее устойчивость или неустойчивость.

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Математические основы теории устойчивости

ДУ САУ имеет вид:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) X_{вых}(p) = (b_м p^м + b_{м-1} p^{м-1} + \ldots + b_1 p + b_0) X_{вх}(p) \quad \textbf{(1)}$$

Здесь $X_{вых}(p)$ - изображение выходной величины $x(t)=X_с(t)+X_в(t)$

Хв(t) определяется возмущением, поэтому определяется характером входного воздействия, т.е. правой частью ДУ. Она определяется как частное решение неоднородного ДУ вида (1).

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Математические основы теории устойчивости

Xc(t) определяется общим решением однородного ДУ (1) без правой части:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) X_C(p) = 0$$

Для его решения достаточно найти корни $p_1, \ldots, p_n$ характеристического уравнения:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

А само решение ДУ будет иметь вид: $$X_C(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

Где C_i - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий

Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Связь между типом корней и видом переходного процесса

- В общем случае $p_i = \alpha_i + j\omega_i$.

Если все корни разные, они называются простыми;

если среди корней есть одинаковые, то их называют кратными (это очень редкий случай для реальных систем).

вещественные корни $p_i = \alpha_i$ - составляющие $x_i = C_i e^{\alpha_i t}$;

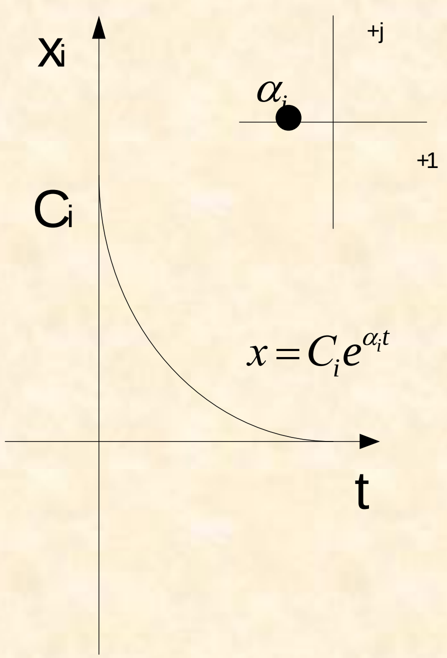
Комплексные корни всегда бывают попарно сопряженными:

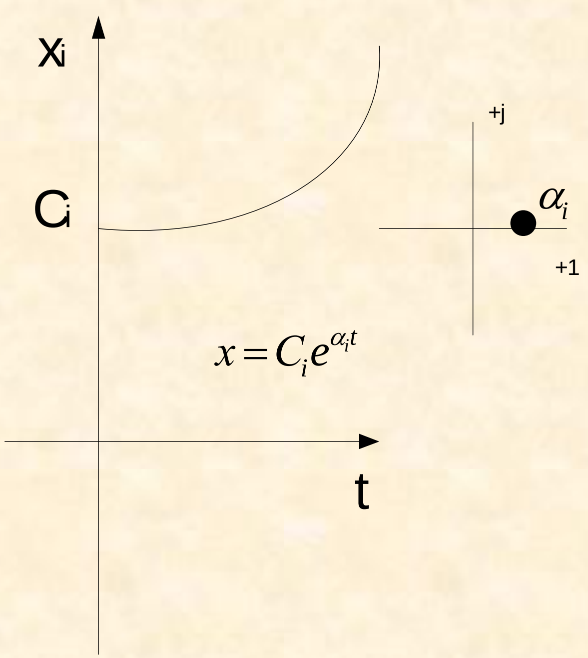
$$p_i = \alpha_i + j\omega_i \quad \text{и} \quad p_{i+1} = \alpha_i - j\omega_i$$

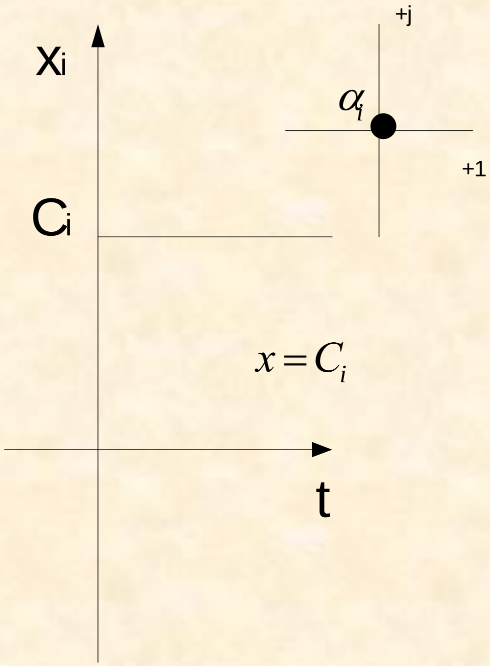
Автор: И.В. Музылёва, к.т.н., доцент кафедры Электропривода ЛГТУ
Блог cifra.studentmiv.ru

Вид составляющей свободного движения при вещественных корнях характеристического уравнения, когда

$$x_i = C_i e^{\alpha_i t}$$



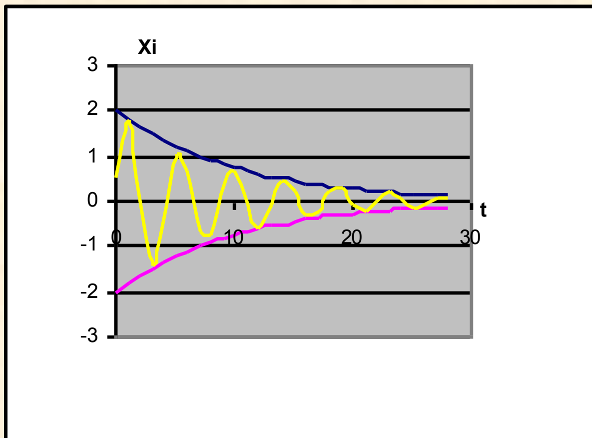


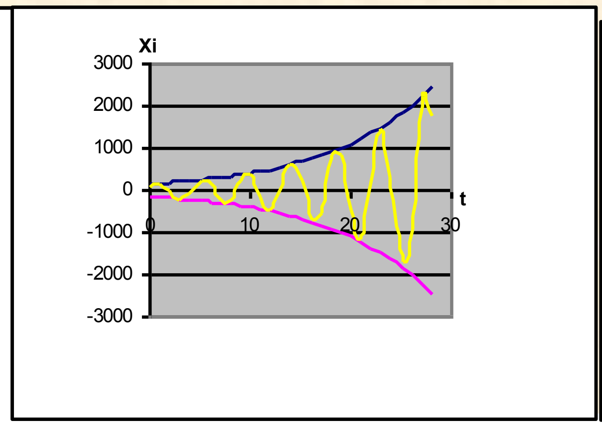


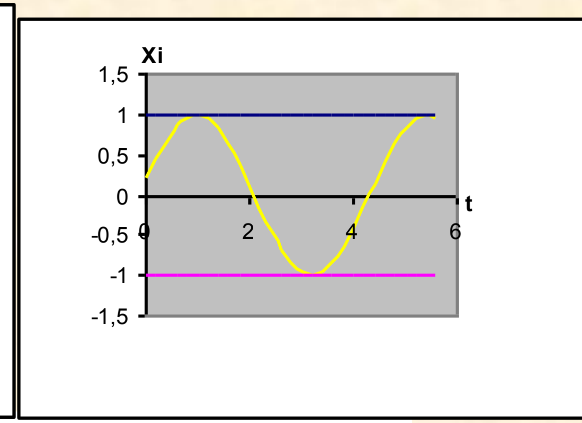
Вид составляющей свободного движения при комплексных сопряженных корнях характеристического уравнения, когда

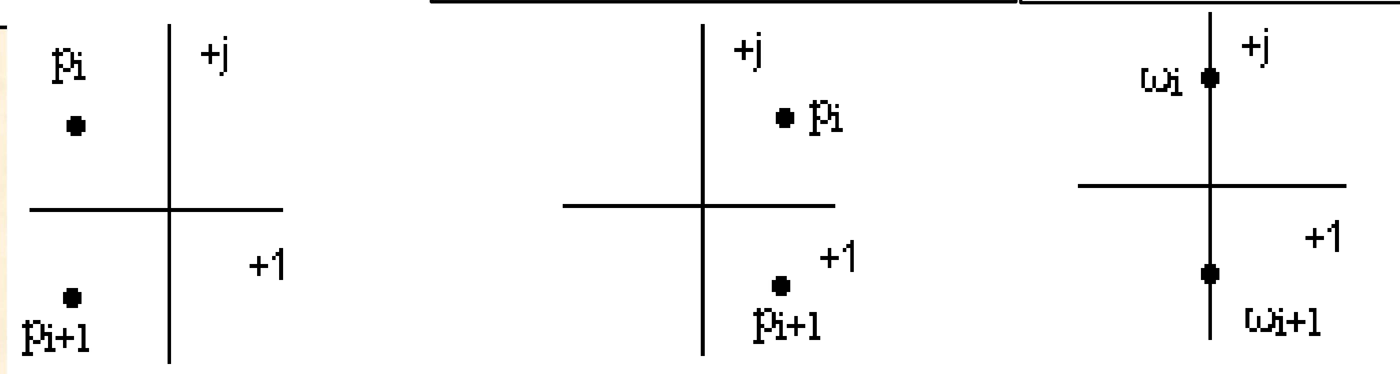
$$x_i = e^{\alpha_i t} \cdot A_i \sin(\omega_i t + \psi_i)$$

$$A_i = \sqrt{(C_i + C_{i+1})^2 + (C_i - C_{i+1})^2} = \sqrt{2C_i^2 + 2C_{i+1}^2} \qquad \varphi_i = arctg \frac{C_i - C_{i+1}}{C_i + C_{i+1}}$$









Первая теорема Ляпунова

Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части, то действительная система так же как линеаризованная, будет устойчива при малых отклонениях (устойчива «в малом») независимо от отброшенных при линеаризации членов второй и более высокой степеней.

Вторая теорема Ляпунова

- **Если среди корней характеристического уравнения линеаризованной системы есть <u>хотя бы один корень с положительной вещественной частью</u>, то действительная система, так же как и линеаризованная, будет неустойчивой независимо от отброшенных при линеаризации уравнения членов второй и более высокой степеней.**

Критическая система

Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с нулевым значением вещественной части или чисто мнимые корни, а все остальные корни – отрицательную вещественную часть, то судить об устойчивости действительной системы по линеаризованным уравнениям нельзя, т.к. нужно учитывать отброшенные при линеаризации нелинейные члены.

Такой случай называется **критическим**.