

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Модуль

Частотные характеристики
типовых элементарных звеньев

Часть 2. Частотные характеристики типовых элементарных звеньев (П, А, И, Д)

Алгоритм расчета частотных характеристик

1. В уравнении передаточной функции $W(p)$ заменяем p на $j\omega$ и получаем формулу АФЧХ $W(j\omega)$.
2. Выделяем в АФЧХ действительную и мнимую части:

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

3. Находим формулу АЧХ -

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

4. Находим формулу ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

5. Строим графики $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$.
6. Строим график АФЧХ на комплексной плоскости - годограф

Частотные характеристики П-звена

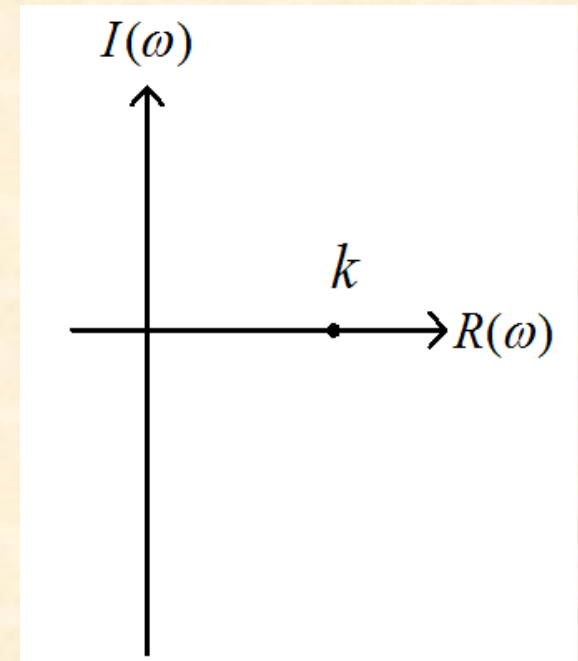
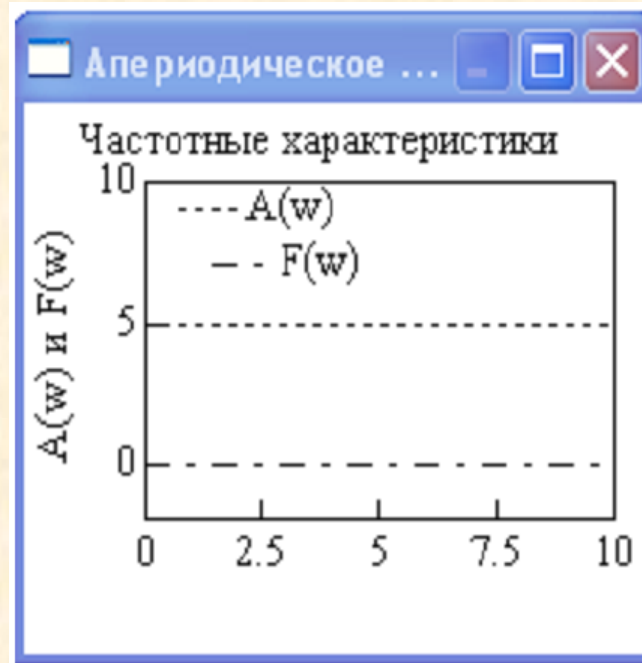
1. В уравнении передаточной функции $W(p)=k$ заменяем p на $j\omega$ и получаем формулу АФЧХ $W(j\omega)=k$.

2. Выделяем в АФЧХ действительную и мнимую части:

$$W(j\omega)=k+j\cdot 0, \text{ где } R(\omega)=k \text{ и } I(\omega)=0$$

3. АЧХ $A(\omega)=k$

4. ФЧХ $\phi(\omega)=0$



Частотные характеристики А-звена 1

1. В уравнении передаточной функции

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$$

заменяем p на $j\omega$ и получаем формулу АФЧХ -

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

2. Выделяем в АФЧХ действительную и мнимую части:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k \cdot (1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Где

$$R(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$$

и

$$I(\omega) = - \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Частотные характеристики А-звена 2

Доказательство, что полный годограф - окружность

Сложим действительную и мнимую характеристики

$$R(\omega) + I(\omega) = \frac{k(1 - \omega T)}{1 + \omega^2 T^2}$$

возведем в квадрат левую и правую части полученного равенства.

$$[R(\omega) + I(\omega)]^2 = \frac{k^2 (1 - \omega T)^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2}$$

Окончательно получим –

$$R^2(\omega) + 2R(\omega)I(\omega) + I^2(\omega) = \frac{k^2}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{2\omega T k^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = kR(\omega) + 2R(\omega)I(\omega)$$

Взаимное уничтожение в правой и левой частях слагаемого даст –

$$2R(\omega)I(\omega)$$

Частотные характеристики А-звена 3

Доказательство, что полный годограф - окружность

$$R^2(\omega) + I^2(\omega) = kR(\omega) \text{ или } R^2(\omega) + I^2(\omega) - kR(\omega) = 0$$

Добавим к правой и левой частям последнего равенства

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$$R^2(\omega) + I^2(\omega) - kR(\omega) + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

и преобразуем левую часть полученного выражения –

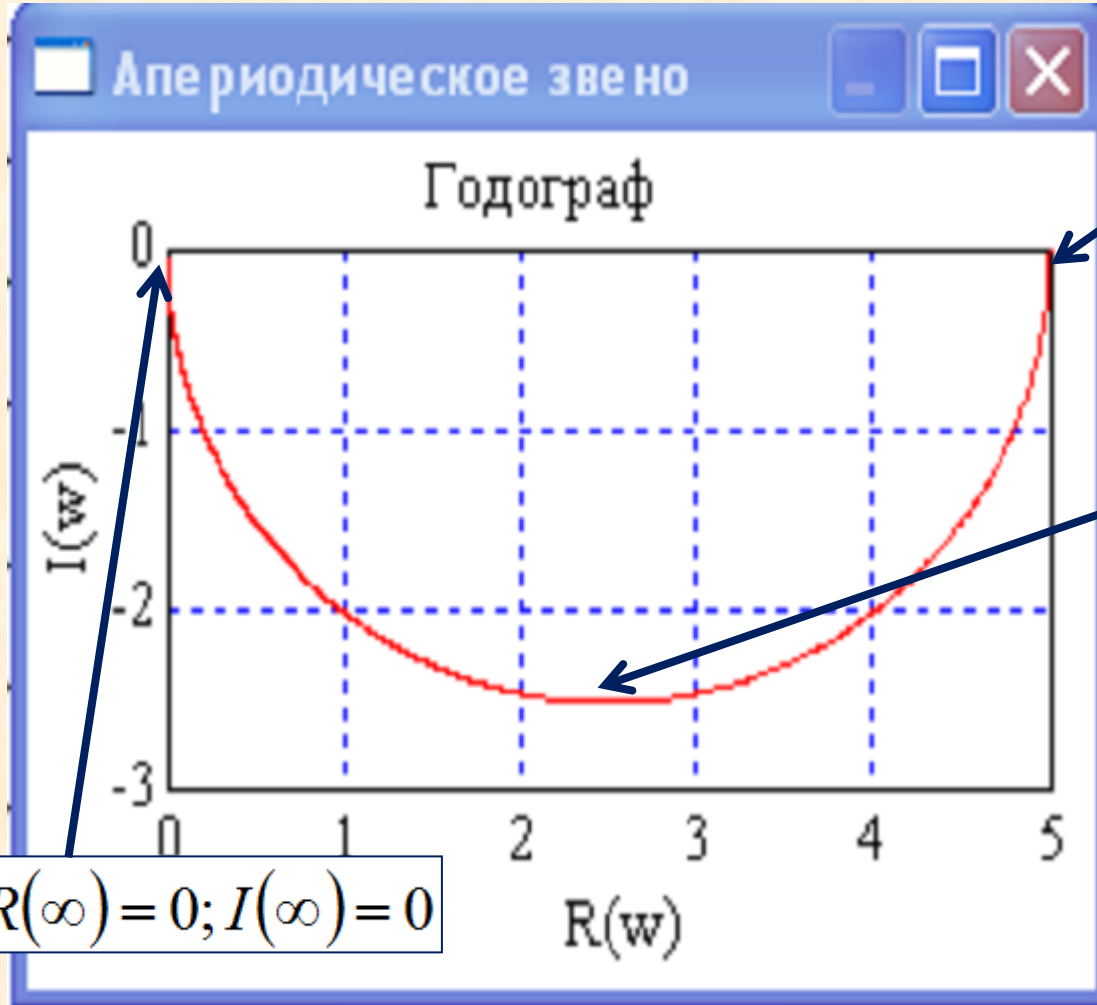
$$R^2(\omega) - 2 \cdot \frac{k}{2} \cdot R(\omega) + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + I^2(\omega) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \text{ или } \left(R(\omega) - \frac{k}{2}\right)^2 + I^2(\omega) = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Это уравнение окружности

радиусом $k/2$ с центром в точке с координатами $(0, k)$

Частотные характеристики А-звена 4

Годограф с характерными точками



$$R(0) = k, \quad I(0) = 0$$

$$R(\omega_0) = \frac{k}{\sqrt{2}}; \quad I(\omega_0) = -\frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$R(\infty) = 0; \quad I(\infty) = 0$$

Частотные характеристики А-звена 5

АЧХ и ФЧХ

Вывод формулы АЧХ

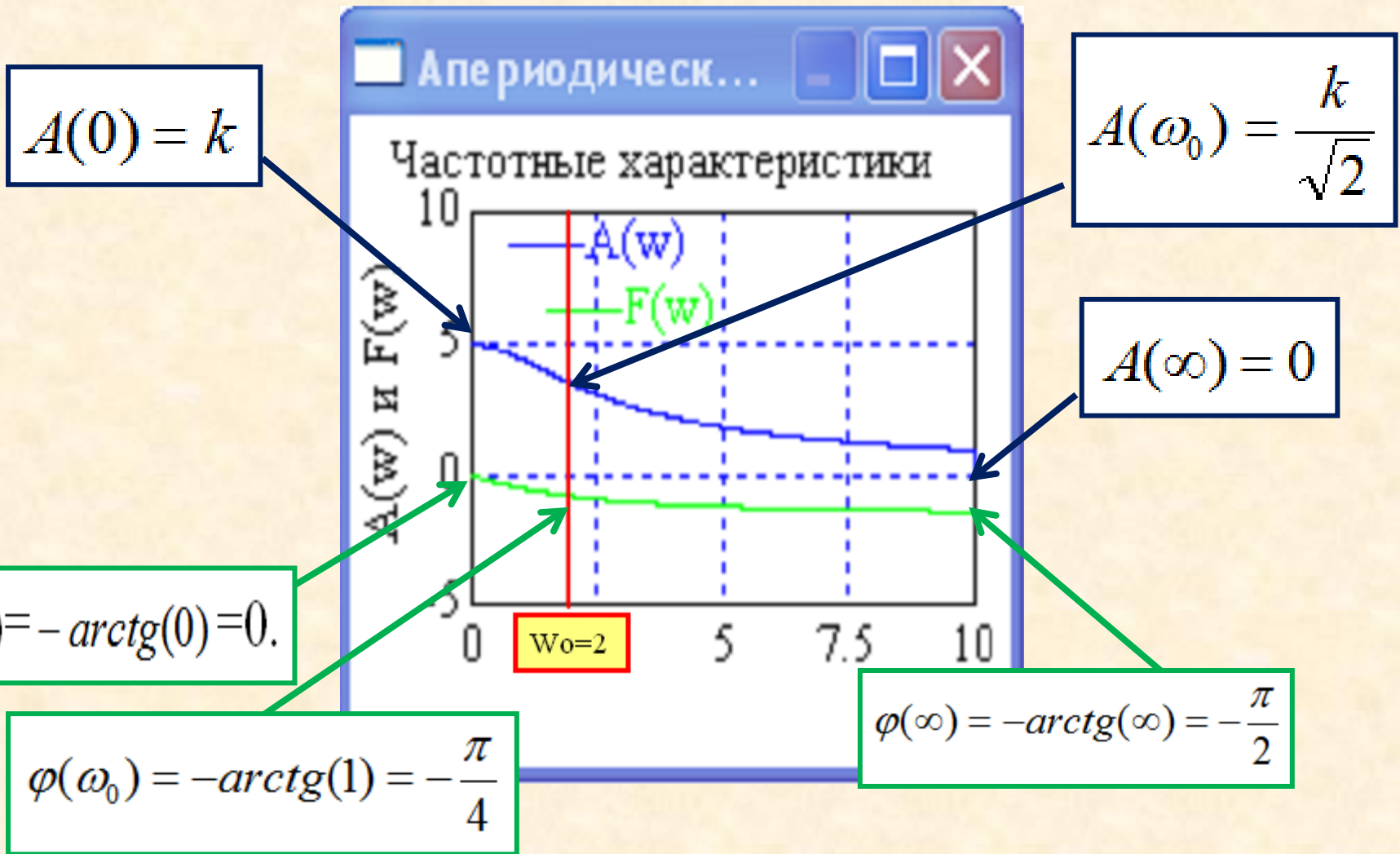
$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2 + k^2 \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2}} = \sqrt{\frac{k^2 (1 + \omega^2 T^2)}{(1 + \omega^2 T^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

Вывод формулы ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{-k\omega T}{k}\right) = -\arctg(\omega T)$$

Частотные характеристики А-звена 6

Графики АЧХ и ФЧХ с характерными точками



Частотные характеристики ИИ-звена 1

Графики АЧХ и ФЧХ

$$W(p) = \frac{k}{p}$$

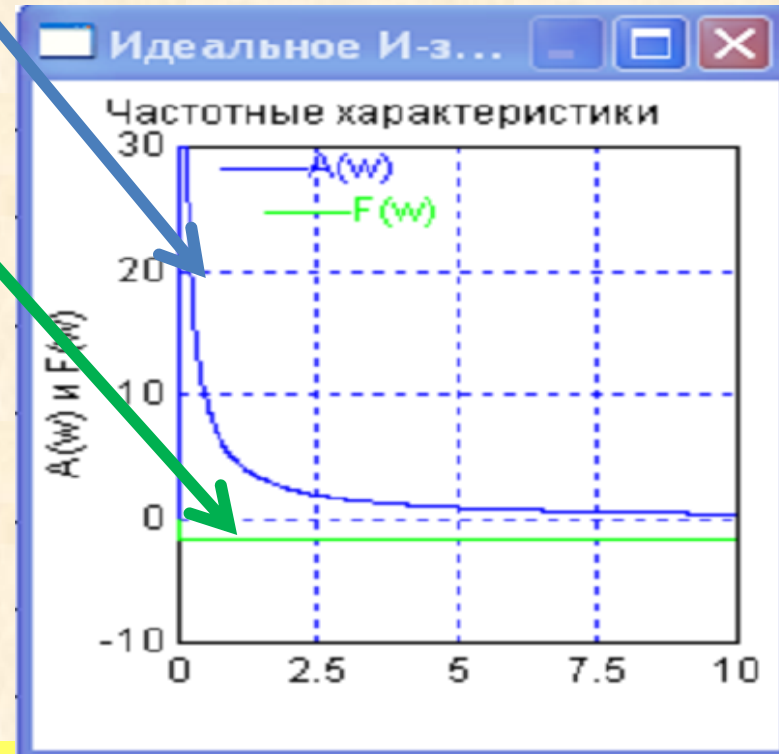
$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$$

$$R(\omega) = 0$$

$$I(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-k}{\omega \cdot 0}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

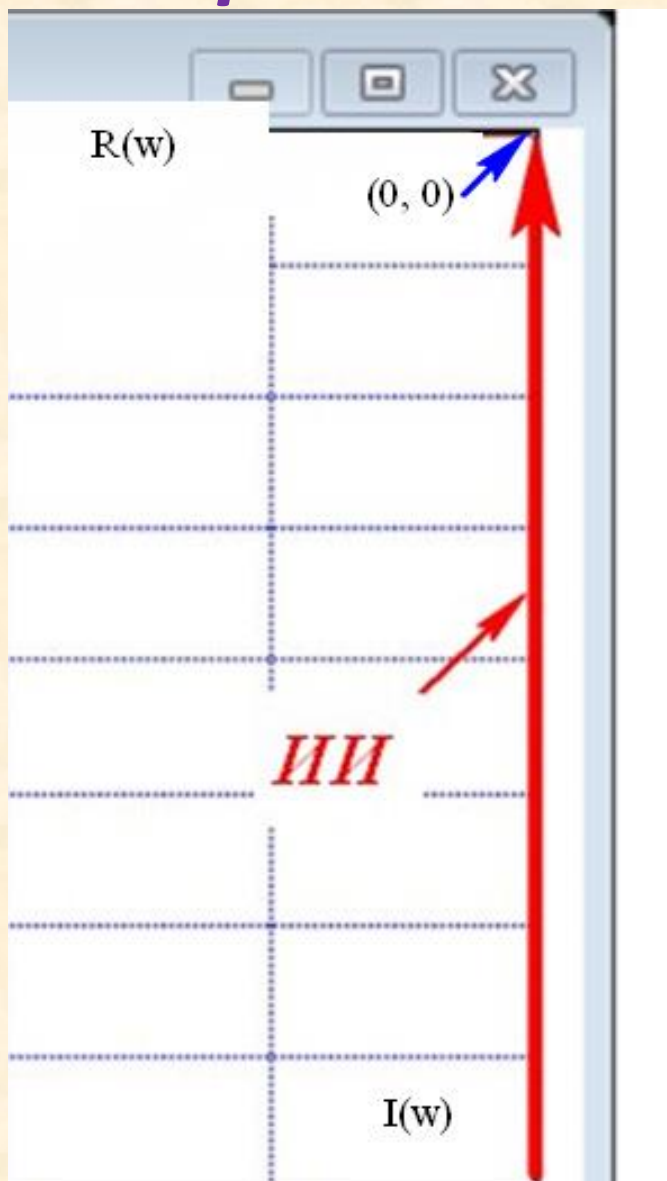


Частотные характеристики ИИ-звена 2

Годограф идеального интегратора

$$R(\omega) = 0$$

$$I(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$



Частотные характеристики РИ-звена 1

$$W(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{k}{Tp + 1}$$



$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{k(1 - j\omega T)}{j\omega(1 + \omega^2 T^2)} = \frac{-jk - k\omega T}{\omega(1 + \omega^2 T^2)} =$$



$$= -\frac{k\omega T}{\omega(1 + \omega^2 T^2)} - j\frac{k}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$



$$R(\omega) = -\frac{k\omega T}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$



$$I(\omega) = -\frac{k}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

Частотные характеристики РИ-звена 2

АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2 \omega^2 T^2 + k^2}{\omega^2 (1 + \omega^2 T^2)}} = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{-k}{-k\omega T} =$$

Учет отрицательных знаков действительной и мнимой ЧХ

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega T} = \pi + \operatorname{arctg} \omega T =$$



$$= \pi + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T = \frac{3}{2} \pi - \operatorname{arctg} \omega T = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T$$

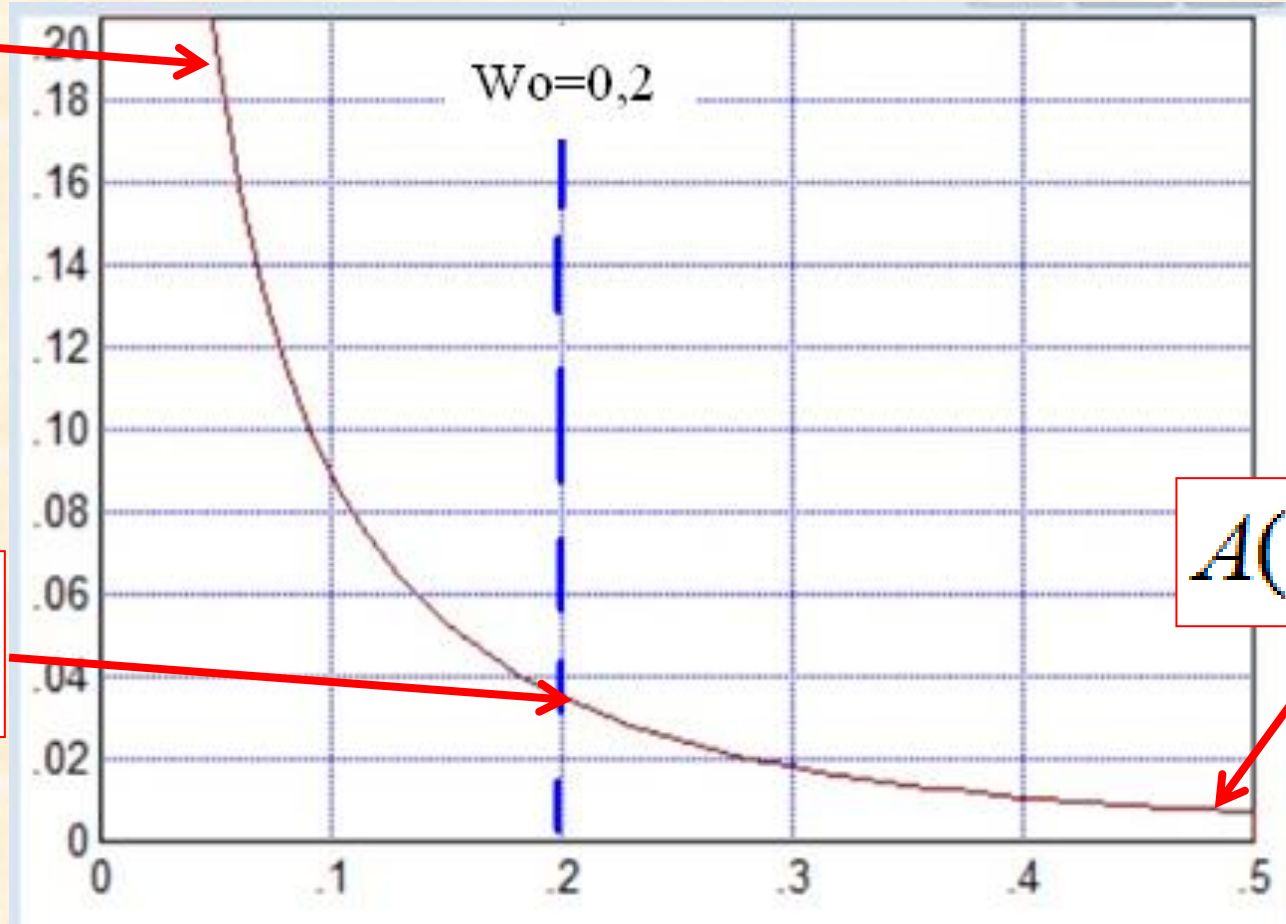
Частотные характеристики РИ-звена 3

АЧХ с характерными точками

$$A(0) = \infty$$

$$A(\omega_0) = \frac{kT}{\sqrt{2}}$$

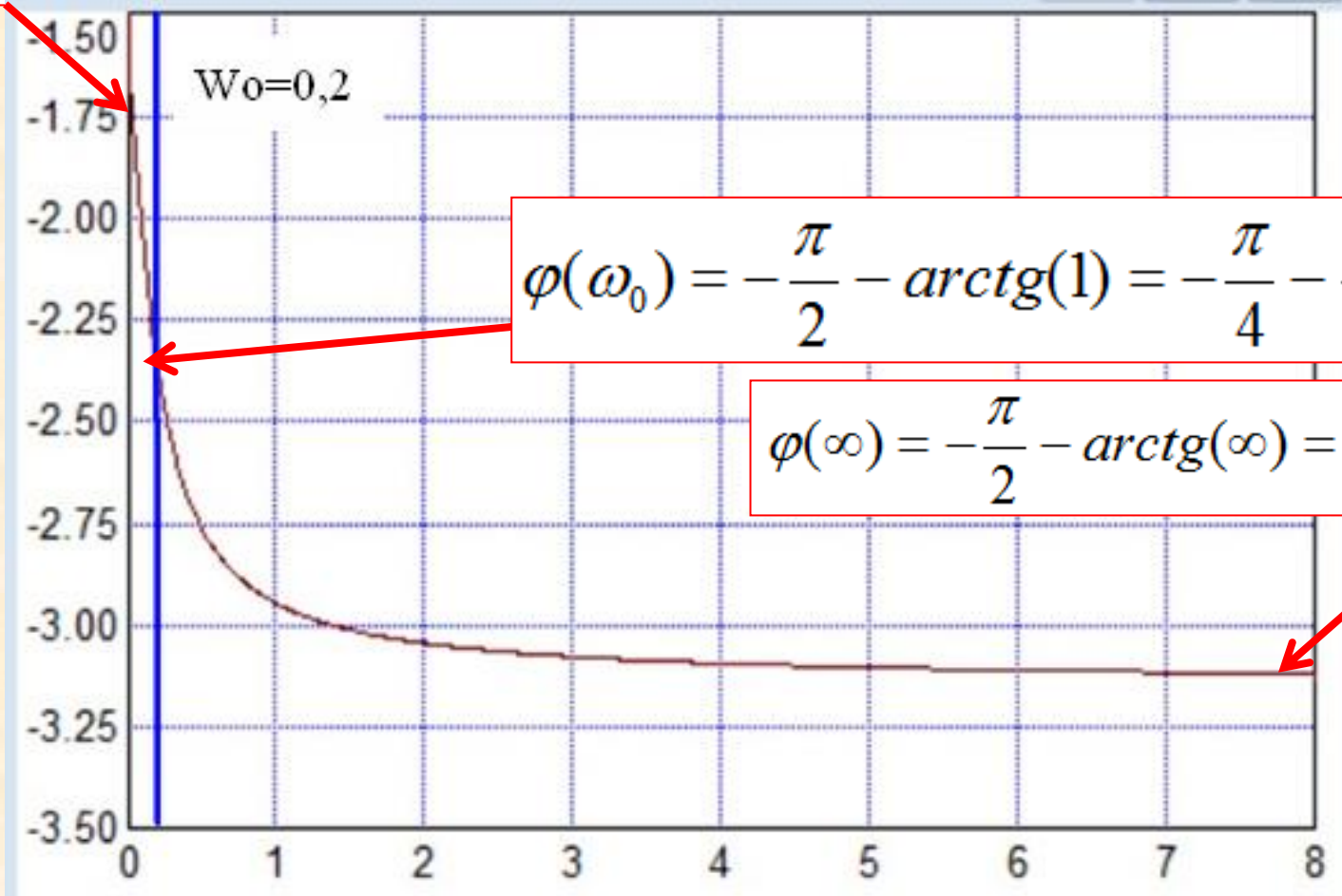
$$A(\infty) = 0$$



Частотные характеристики РИ-звена 4

ФЧХ с характерными точками

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(0) = -\frac{\pi}{2}$$

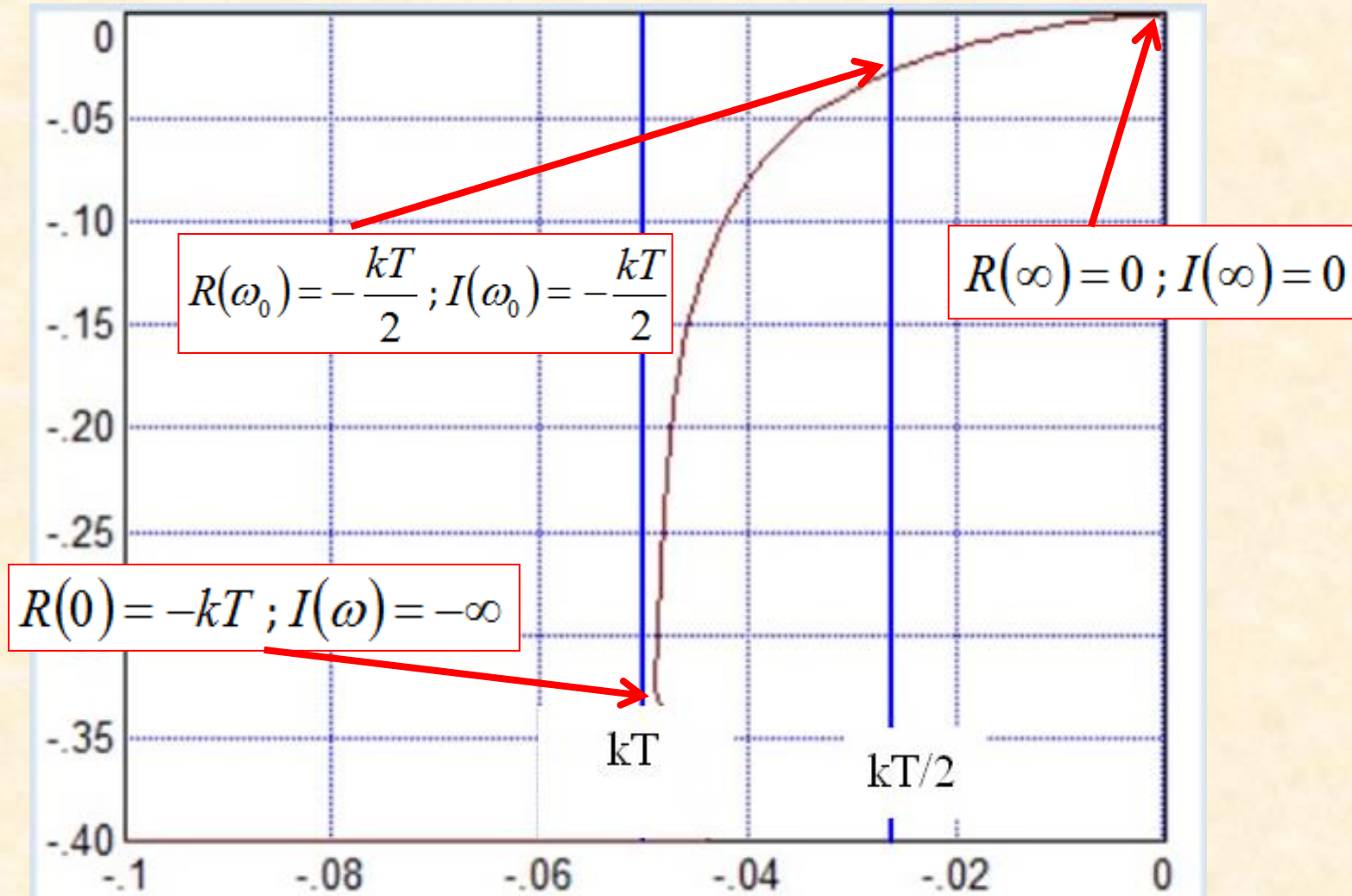


$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\infty) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

Частотные характеристики РИ-звена 5

Годограф с характерными точками



Частотные характеристики ИД-звена

$$W(p) = kp$$

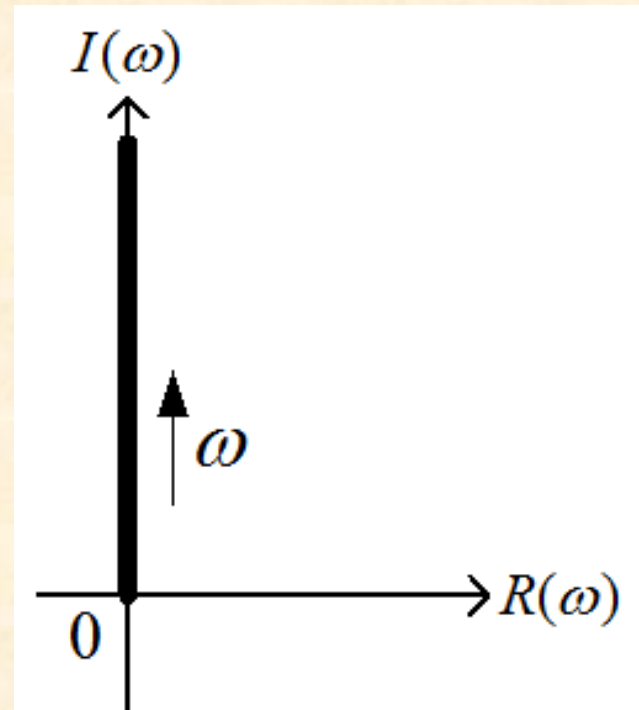
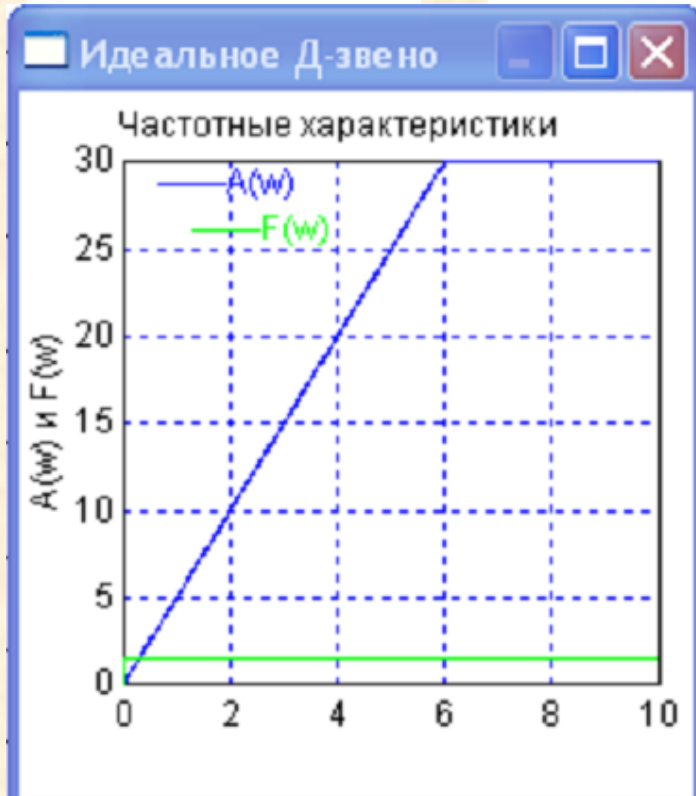
$$\longrightarrow W(j\omega) = j\omega k$$

$$R(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = k\omega$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega k}{0} = \operatorname{arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

$$I(\omega) = \omega k$$



Частотные характеристики РД-звена 1

$$W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{jT\omega + 1} = j\omega k \frac{1 - jT\omega}{1 + T^2\omega^2} = \frac{T\omega^2 k}{T^2\omega^2 + 1} + j \frac{\omega k}{1 + T^2\omega^2}$$

$$R(\omega) = \frac{Tk\omega^2}{1 + T^2\omega^2}$$

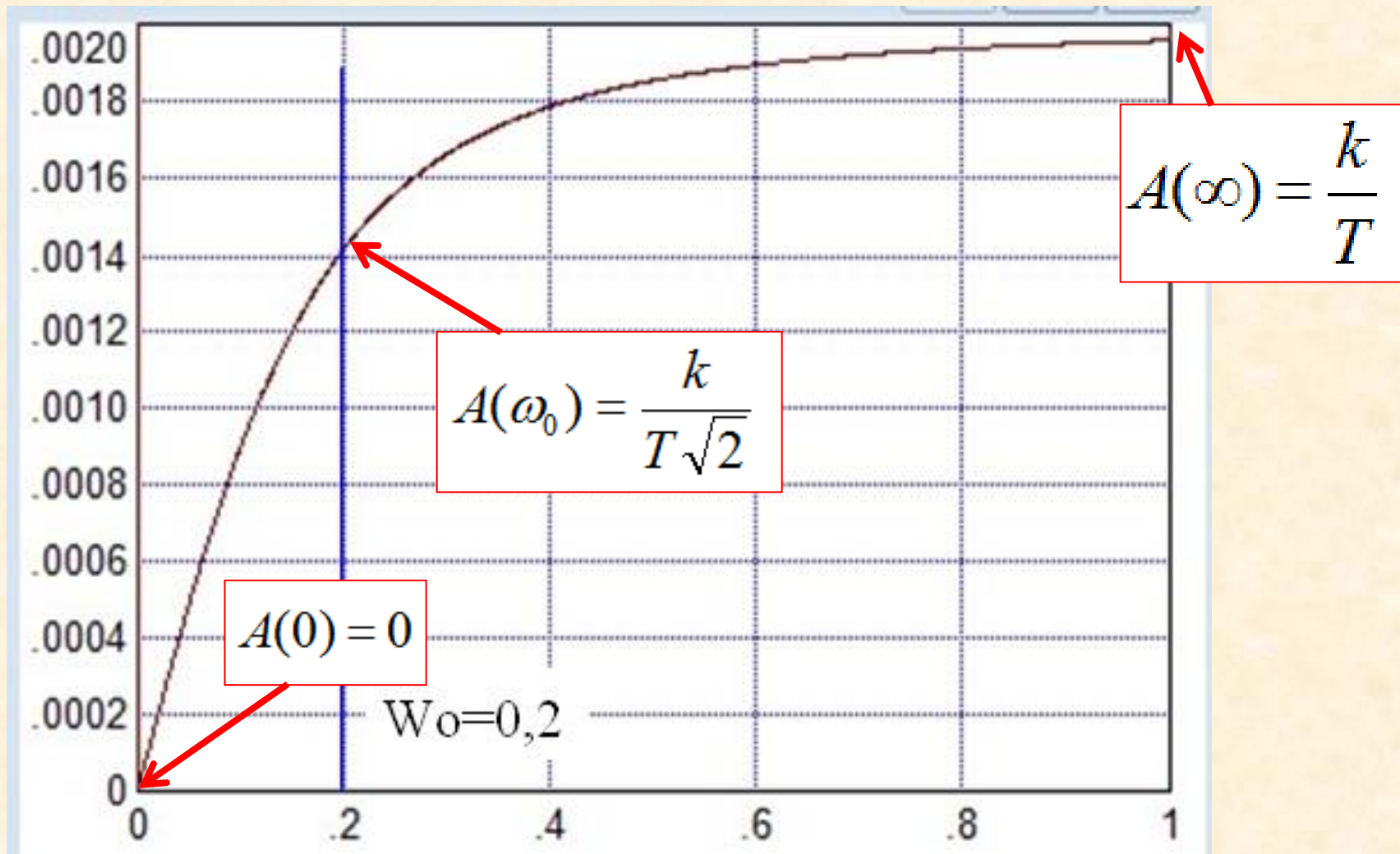
$$I(\omega) = \frac{\omega k}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{T^2 K^2 \omega^4 + \omega^2 K^2}{(1 + T^2 \omega^2)^2}} = \omega k \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega k}{Tk\omega^2} = \arctg \frac{1}{\omega T} = \text{arcctg} \omega T = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T$$

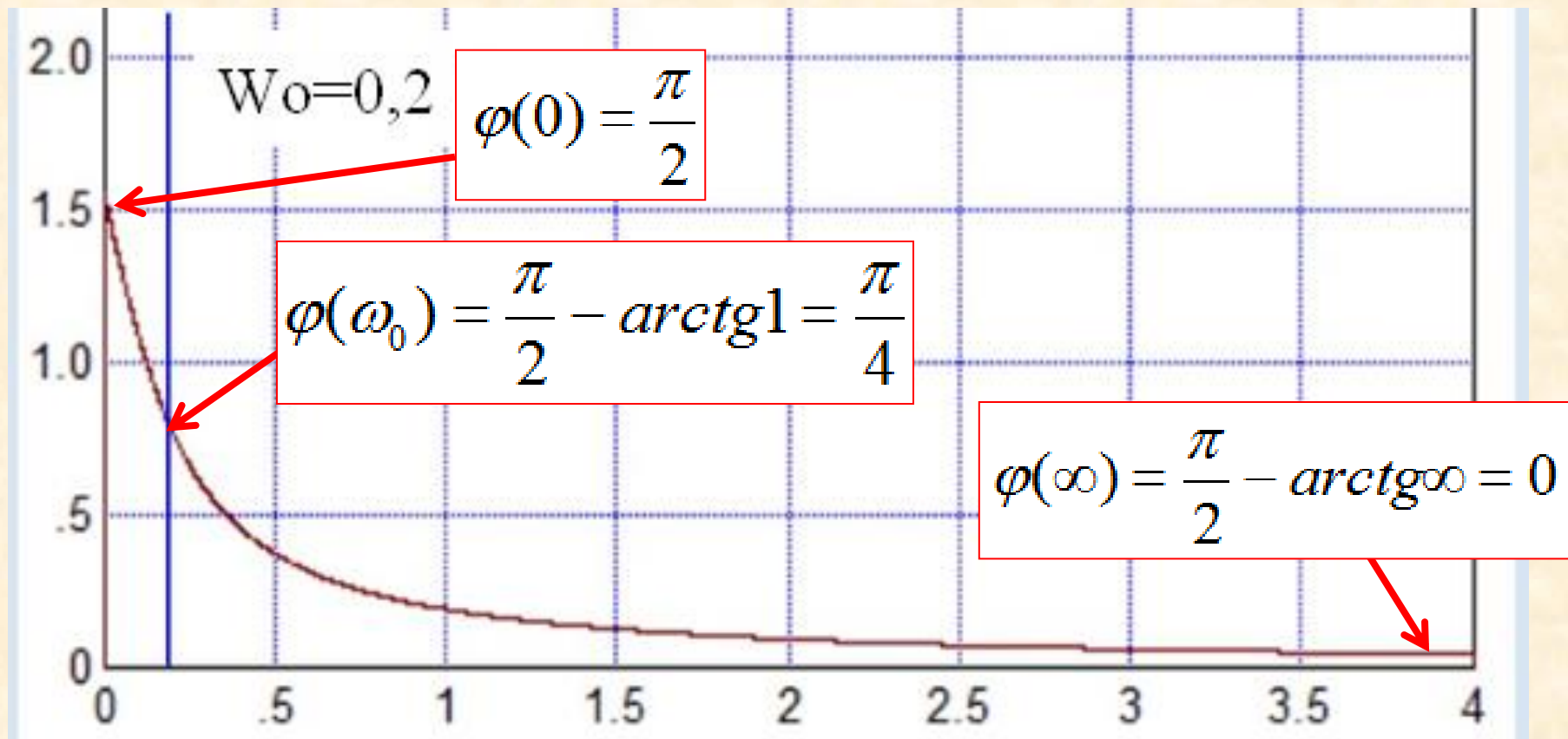
Частотные характеристики РД-звена 2

АЧХ с характерными точками



Частотные характеристики РД-звена 3

ФЧХ с характерными точками



Частотные характеристики РД-звена 4

Доказательство, что годограф - окружность

Сначала сложим действительную и мнимую ЧХ.

$$R(\omega) + I(\omega) = \frac{T k \omega^2 + \omega k}{1 + T^2 \omega^2} = \frac{k(T \omega^2 + \omega)}{1 + T^2 \omega^2} = \frac{k \omega (T \omega + 1)}{1 + T^2 \omega^2}$$

Затем возведем в квадрат левые и правые части

$$R^2(\omega) + I^2(\omega) + 2R(\omega)I(\omega) = \frac{k^2 \omega^2 (1 + 2T\omega + T^2 \omega^2)}{(1 + T^2 \omega^2)^2} = \frac{k\omega}{1 + T^2 \omega^2} \left[\frac{k\omega(1 + 2T\omega + T^2 \omega^2)}{1 + T^2 \omega^2} \right]$$
$$= I(\omega) \left(\frac{k\omega^2 2T}{1 + T^2 \omega^2} + k\omega \right) = I(\omega)(2R(\omega) + k\omega) = \underline{2R(\omega)I(\omega)} + I(\omega)k\omega.$$

Уничтожаются

Частотные характеристики РД-звена 5

Доказательство, что годограф – окружность(окончание)

$$R^2(\omega) + I^2(\omega) = k\omega I(\omega) = \frac{k^2 \omega^2}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{k}{T} R(\omega)$$

Прибавив к левой и правой части $\left(\frac{k}{2T}\right)^2$ получим

$$R^2(\omega) + I^2(\omega) - \frac{2k}{2T} R(\omega) + \left(\frac{k}{2T}\right)^2 = \left(\frac{k}{2T}\right)^2 \quad \text{ИЛИ}$$

$$I^2(\omega) + \left(R(\omega) - \frac{k}{2T}\right)^2 = \left(\frac{k}{2T}\right)^2 - \text{окружность}$$

Частотные характеристики РД-звена 6

Годограф с характерными точками

