Теория автоматического управления
2 семестр
Тема 1
Теория
Переходная функция звена 2-го порядка
Анализ характеристического уравнения

Передаточная функция данного звена

$$W(p)=\frac{k}{T_1^2p^2+T_2p+1}. \qquad (1)$$

Характеристическое уравнение

$$T_1^2p^2+T_2p+1=0. \qquad (2)$$

Это обычное квадратное уравнение. Найдем его корни:

$$p_{1,2}=\frac{-T_2\pm\sqrt{T_2^2-4T_1^2}}{2T_1^2}. \qquad (3)$$

Очевидно, в зависимости от величины подкоренного выражения

$$\sqrt{T_2^2-4T_1^2}$$

корни будут либо действительными, либо комплексными числами.

Если справедливо соотношение

$$T_2^2-4T_1^2\geq 0,$$

то

$$T_2^2\geq 4T_1^2 \qquad (4)$$

и коэффициент затухания

$$\xi=\frac{T_2}{2T_1}>1.$$

Звено 2-го порядка в этом случае носит название ***инерционного (апериодического) звена 2-го порядка.***

Если в подкоренном выражении (3) имеет место неравенство

$$T_2^2-4T_1^2<0,$$

то получается соотношение постоянных времени

$$T_2^2<4T_1^2, \qquad (5)$$

при котором коэффициент затухания

$$\xi=\frac{T_2}{2T_1}<1.$$

Звено 2-го порядка в этом случае называется ***колебательным звеном.***

Идеальным колебательным является звено с незатухающими колебаниями: для него коэффициент затухания $\xi = 0$.

Очевидно, что это возможно только при равенстве постоянной времени

$$T_2 = 0.$$

При этом колебательное звено вырождается в ***консервативное***.

Если же для звена 2-го порядка принять

$$T_1 = 0,$$

то коэффициент затухания примет значение

$$\xi = \infty.$$

Это означает, что колебаний не может быть в принципе! В этом случае получаем ***апериодическое звено 1-го порядка***, т.е. рассмотренное ранее А-звено.

Переходные процессы звена 2-го порядка

Изображение переходной функции данного звена имеет вид

$$H(p) = \frac{k}{p\left(T_1 p^2 + T_2 p + 1\right)}. \qquad (6)$$

Для определения её оригинала необходимо выражение в скобке знаменателя (6) разложить на множители. Для этого нужно определить корни характеристического уравнения (2) для соотношений постоянных времени (4) и (5).

Инерционное звено 2-го порядка

Для этого звена корни характеристического уравнения будут рассчитываться как

$$p_1 = \frac{-T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} = -\alpha_1; \quad p_2 = \frac{-T_2 + \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} = -\alpha_2.$$

Очевидно, что они являются ***вещественными и отрицательными***. Здесь

$$\alpha_1 = \frac{T_2 + \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2}; \ \alpha_2 = \frac{T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2}.$$

По правилу разложения на сомножители:

$$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = T_1^2 (p + \alpha_1)(p + \alpha_2).$$

Изображение переходной функции можно представить в виде

$$H(p) = \frac{k}{T_1^2} \frac{1}{p(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}.$$

Согласно строке 13 таблицы оригиналов и изображений (стр. 59), полученному изображению соответствует оригинал:

$$h(t) = \frac{k}{T_1^2} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} \left[(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} \right]. \qquad (7)$$

Упростим данное выражение. Для этого отдельно найдем

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{T_2 + \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} \cdot \frac{T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} = \\ = \frac{T_2^2 - \left(T_2^2 - 4T_1^2\right)}{2T_1^4} = \frac{4T_1^2}{4T_1^4} = \frac{1}{T_1^2}. \qquad (8)$$

Следовательно,

$$\frac{k}{T_1^2} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{k}{T_1^2} T_1^2 = k.$$

При этом переходная функция принимает вид

$$h(t) = k \left[1 - \frac{\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right] = k \left[1 - \frac{\alpha_2 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right] = \\ = \left[\left(k - \frac{k \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) + \left(\frac{k \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) \right]. \qquad (9)$$

Очевидно, что выражение (9) представляет собой сумму ***двух*** экспонент. Поэтому звено второго порядка с указанным соотношением постоянных времени $T_2 \geq 2T_1$ и называют ***инерционным звеном второго*** *порядка*.

К данному выводу приводит и тот факт, что передаточная функция данного звена может быть представлена в виде

$$W(p)=\frac{k}{T_1^2}\frac{1}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)}=\frac{k}{T_1^2\alpha_1\alpha_2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}p+1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\alpha_2}p+1}.$$

И окончательно:

$$W(p)=\frac{k_1}{\frac{1}{\alpha_1}p+1}\cdot\frac{k_2}{\frac{1}{\alpha_2}p+1}. \qquad (10)$$

Ему соответствует последовательное соединение двух инерционных звеньев первого порядка (А-звеньев) с постоянными времени:

$$T_3=\frac{1}{\alpha_1},\ T_4=\frac{1}{\alpha_2}$$

и коэффициентами усиления k_1 и k_2 такой величины, что $k_1\cdot k_2=k$. Пример моделирования переходного процесса данного инерционного звена второго порядка приведен на рис. 1.

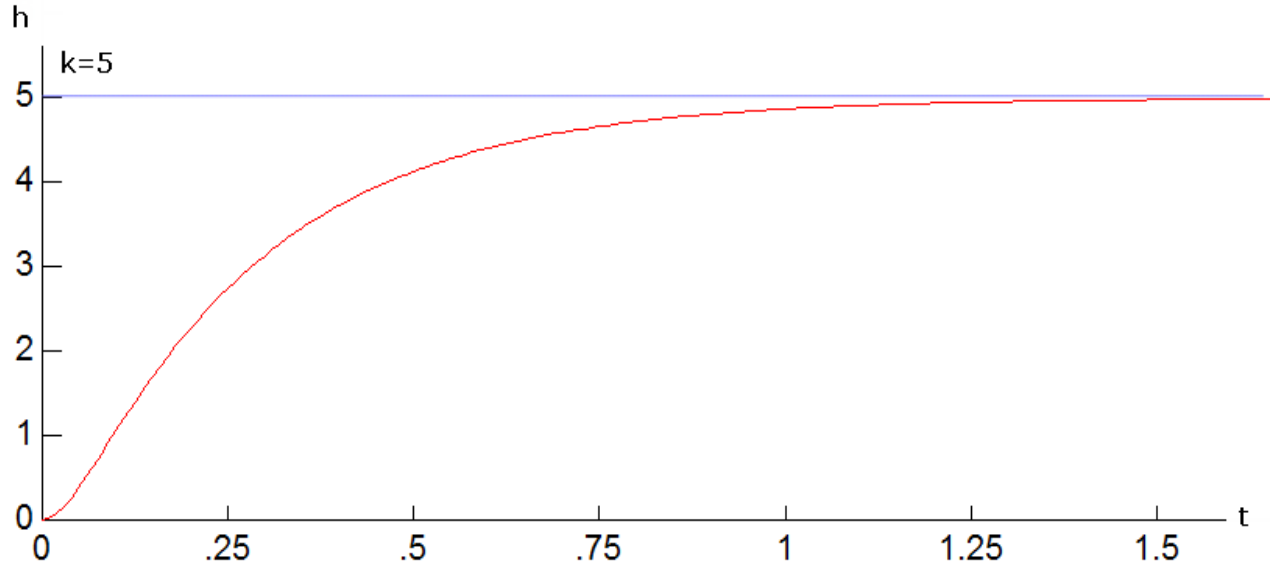

Рис. 1. Переходный процесс инерционного звена 2-го порядка с параметрами k = 5, T_1 = 0,1, T_2 = 0,3

Колебательное звено

Для данного звена имеет место ***2-й случай*** соотношения постоянных времени (5).

При этом корни характеристического уравнения можно представить в виде

$$p_{1,2}=\frac{-T_2\pm\sqrt{T_2^2-4T_1^2}}{2T_1^2}=-\frac{T_2}{2T_1^2}\pm\sqrt{\frac{(-1)\cdot\left(4T_1^2-T_2^2\right)}{4T_1^4}}=$$

$$=-\frac{T_2}{2T_1^2}\pm j\sqrt{\frac{4T_1^2-T_2^2}{4T_1^4}}=-\beta\pm j\omega,$$

где

$$\beta=\frac{T_2}{2T_1^2};\ \omega=\sqrt{\frac{4T_1^2-T_2^2}{4T_1^4}}. \qquad (11)$$

Соответственно каждый корень преобразуется к виду

$$p_1=-\beta-j\omega\ ;p_2=-\beta+j\omega. \qquad (12)$$

Очевидно, что это ***комплексные корни с отрицательной вещественной частью***.

Введем дополнительные переменные:

$$\alpha'=-p_1=\beta+j\omega \ \text{ и } \ \gamma'=-p_2=\beta-j\omega.$$

Тогда передаточную функцию (1) можно представить в виде

$$W(p)=\frac{k}{T_1^2(p+\alpha')(p+\gamma')}.$$

При этом изображение переходной функции:

$$H(p)=\frac{k}{T_1^2p(p+\alpha')(p+\gamma')}=\frac{k}{T_1^2\alpha'\gamma'p\left(\frac{1}{\alpha'}p+1\right)\left(\frac{1}{\gamma'}p+1\right)}. \qquad (13)$$

Упростим это выражение, для чего найдем величину коэффициента

$$T_1^2\alpha'\gamma'=T_1^2(\beta+j\omega)(\beta-j\omega)=T_1^2\left(\beta^2+\omega^2\right)=T_1^2\left(\frac{T_2^2}{4T_1^4}+\frac{1}{T_1^2}-\frac{T_2^2}{4T_1^4}\right)=1.$$

Отсюда

$$\beta^2+\omega^2=\frac{1}{T_1^2}. \qquad (14)$$

Подстановка в (13) позволит получить уравнение изображения переходной функции:

$$H(p)=\frac{k}{p\left(\frac{1}{\alpha'}p+1\right)\left(\frac{1}{\gamma'}p+1\right)}. \qquad (15)$$

Находим оригинал переходной функции по таблице оригиналов и изображений (строка 13) и с учётом упрощения, аналогичного (8):

$$h(t)=k\left(1+\frac{\gamma' e^{-\alpha' t}-\alpha' e^{-\gamma' t}}{\alpha'-\gamma'}\right).$$

Применяя формулу Эйлера, получим

$$h(t)=k\left[1+\frac{(\beta-j\omega)e^{-(\beta+j\omega)t}-(\beta+j\omega)e^{-(\beta-j\omega)t}}{\beta+j\omega-\beta+j\omega}\right]. \qquad (16)$$

Преобразуем числитель дроби в выражении (16):

$$(\beta-j\omega)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}-(\beta+j\omega)e^{-\beta t}e^{j\omega t}=$$
$$=(\beta-j\omega)e^{-\beta t}\left(\cos(-\omega t)+j\sin(-\omega t)\right)-(\beta+j\omega)e^{-\beta t}\left(\cos\omega t+j\sin\omega t\right)=$$
$$=(\beta-j\omega)e^{-\beta t}\left(\cos\omega t-j\sin\omega t\right)-(\beta+j\omega)e^{-\beta t}\left(\cos\omega t+j\sin\omega t\right)=$$
$$=e^{-\beta t}\left[(\beta-j\omega)(\cos\omega t-j\sin\omega t)-(\beta+j\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)\right]=$$
$$=e^{-\beta t}[\beta\cos\omega t-\underline{\underline{j\omega\cos\omega t}}-\underline{\beta j\sin\omega t}-\omega\sin\omega t-\beta\cos\omega t-$$
$$-\underline{\beta j\sin\omega t}-\underline{\underline{j\omega\cos\omega t}}+\omega\sin\omega t]=e^{-\beta t}\left(\underline{\underline{-2j\omega\cos\omega t-2}}\underline{\beta j\sin\omega t}\right)=$$
$$=e^{-\beta t}(-2j)(\omega\cos\omega t+\beta\sin\omega t).$$

Подставляя его в (16), получаем

$$h(t)=k\left[1+\frac{e^{-\beta t}(-2j)(\omega\cos\omega t+\beta\sin\omega t)}{2j\omega}\right]=$$
$$=k\left[1-e^{-\beta t}\left(\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t+\cos\omega t\right)\right]. \qquad (17)$$

Преобразуем выражение в круглых скобках, согласно известным соотношениям:

$$a\sin\omega t + b\cos\omega t = A\sin(\omega t + \varphi), \text{ где } A = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

В нашем случае

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\beta/\omega} = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\beta}, \qquad (18)$$

$$A = \sqrt{\frac{\beta^2}{\omega^2} + 1} = \sqrt{\frac{\frac{T_2^2}{4T_1^4}4T_1^4}{4T_1^2 - T_2^2} + 1} = \sqrt{\frac{T_2^2 + 4T_1^2 - T_2^2}{4T_1^2 - T_2^2}} = \sqrt{\frac{4T_1^2}{4T_1^2 - T_2^2}}. \qquad (19)$$

Согласно (11), $\omega = \sqrt{\frac{4T_1^2 - T_2^2}{4T_1^4}}$. Очевидно, умножив числитель и знаменатель данного выражения на T_1, получим

$$A = \sqrt{\frac{4T_1^4}{4T_1^2 - T_2^2}}\frac{1}{T_1} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{T_1}. \qquad (20)$$

Подстановка (19) и (20) в круглые скобки выражения (17) позволяет преобразовать их к виду

$$\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t = \frac{1}{\omega T_1}\left(\sin\omega t + arctg\frac{\omega}{\beta}\right).$$

С учетом этого получим окончательное выражение для переходной функции:

$$h(t) = k\left[1 - e^{-\beta t}\frac{1}{\omega T_1}\left(\sin\omega t + arctg\frac{\omega}{\beta}\right)\right], \qquad (21)$$

позволяющее сделать вывод о том, что в данном случае переходная функция звена второго порядка представляет собой ***синусоиду*** с убывающей по экспоненте амплитудой

$$A_m = \frac{e^{-\beta t}}{\omega T_1}.$$

Такое звено уже нельзя представить в виде соединения более простых звеньев. У него есть свое название – ***типовое колебательное звено***.

Видно, что показатель степени экспоненты определяется вещественной частью β комплексных корней (12). Мнимая составляющая ω корней характеристического уравнения является ***круговой частотой*** колебательного звена с периодом колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

На рис. 2 представлен переходный процесс колебательного звена с параметрами k = 5, T_1 = 0,3, T_2 = 0,1. Для него коэффициент затухания:

$$\xi = \frac{T_2}{2T_1} = \frac{0,1}{0,6} = 0,17.$$

По графику переходного процесса можно определить еще один важный параметр – ***степень затухания***, равный

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}.$$

Здесь A_1 и A_2 – превышение первого и второго максимума над установившимся значением переходного процесса, равным коэффициенту усиления k. Для рассматриваемого примера степень затухания равна $\psi = 1 - \frac{1}{3} = 0,7$.

Рис. 2. Переходный процесс колебательного звена с параметрами k = 5, T_1 = 0,3, T_2 = 0,1

Консервативное звено

Частным случаем колебательного звена является ***консервативное звено*** с постоянной времени $T_2 = 0$, описываемое дифференциальным уравнением:

$$T_1^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + x_{\text{вых}}(t) = k x_{\text{вх}}(t). \qquad (22)$$

В операторной форме оно принимает вид

$$\left(T_1^2 p^2 + 1\right) X_{\text{вых}}(p) = k X_{\text{вх}}(p).$$

Отсюда передаточная функция консервативного звена:

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + 1}. \qquad (23)$$

Изображение его переходной функции:

$$H(p) = W(p)\frac{1}{p} = \frac{k}{\left(T_1^2 p^2 + 1\right) p} = \frac{k}{T_1^2} \cdot \frac{1}{\left(p^2 + \frac{1}{T_1^2}\right) p}, \qquad (24)$$

а сама переходная функция, согласно таблице оригиналов и изображений (строка 11 в таблице оригиналов и изображений), имеет вид:

$$h(t) = \frac{k}{T_1^2} T_1^2 \left(1 - \cos\frac{t}{T_1}\right) = k\left(1 - \cos\frac{t}{T_1}\right). \qquad (25)$$

Таким образом, консервативное звено – это идеальное колебательное звено, в котором нет рассеивания энергии (постоянная времени $T_2 = 0$) и колебания не затухают. Пример переходного процесса приведен на рис. 3.

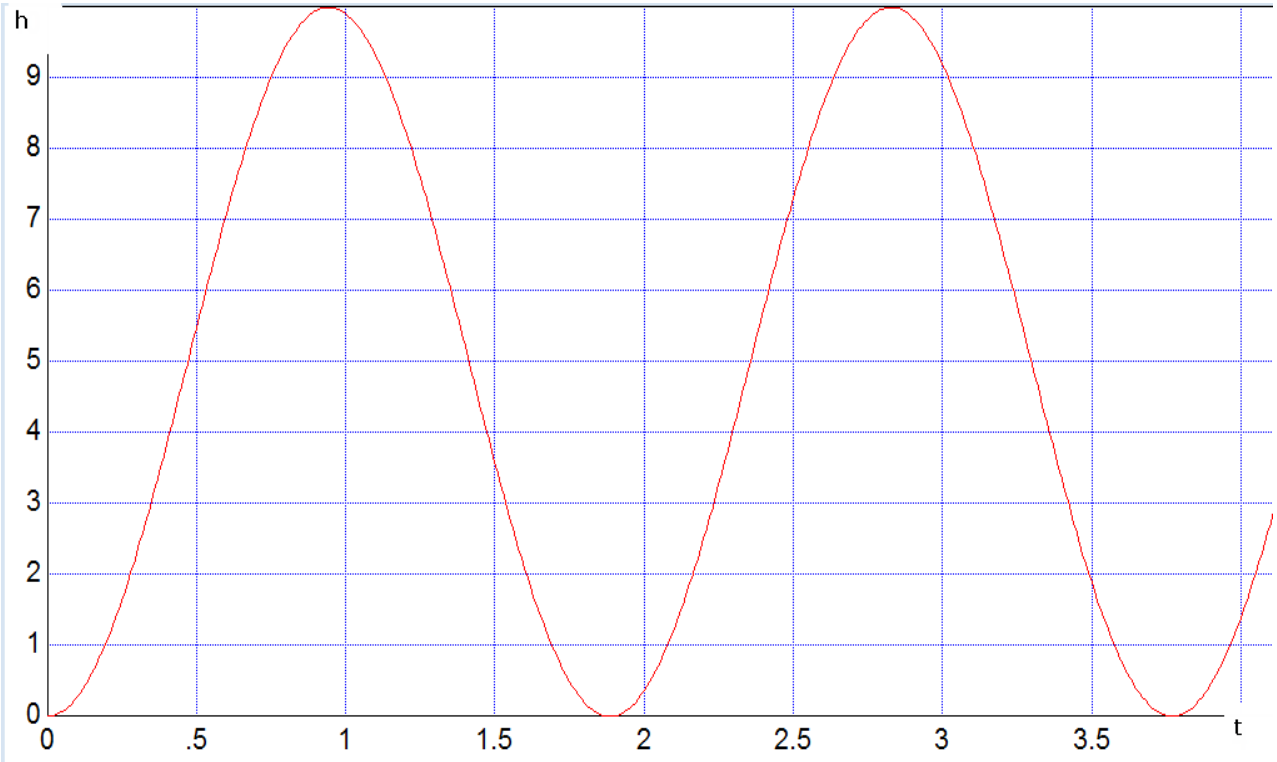

Рис. 3. Переходный процесс консервативного звена с параметрами $k = 5$, $T_1 = 0{,}3$, $T_2 = 0$